ΑΝΑΛΥΣΗ 2

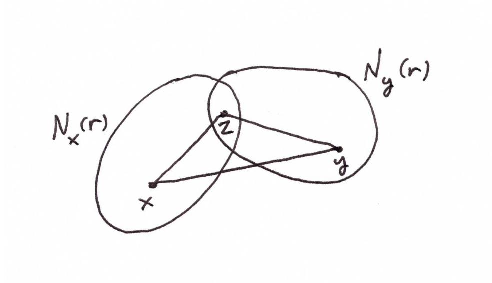
Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΛΗΜΜΑ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε υπάρχει μια περιοχή του x και μια περιοχή του y (και, μάλιστα, ίδιας ακτίνας) οι οποίες είναι ξένες.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$ και $x \neq y$. Τότε $d(x, y) > 0$ και παίρνουμε οποιονδήποτε αριθμό r έτσι ώστε

$$0 < r \leq \frac{1}{2} d(x, y).$$



Θα αποδείξουμε ότι

$$N_x(r) \cap N_y(r) = \emptyset.$$

Έστω (για άτοπο) ότι υπάρχει $z \in N_x(r) \cap N_y(r)$. Τότε $d(z, x) < r$ και $d(z, y) < r$ και, επομένως,

$$2r \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(z, x) + d(z, y) < r + r = 2r,$$

οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. □

Όταν $A \subseteq X$, το συμπλήρωμα του A σε σχέση με το X θα το συμβολίζουμε $X \setminus A$ ή A^c. Το σύμβολο A^c είναι απλούστερο, αλλά θα χρησιμοποιούμε το $X \setminus A$ όταν πρέπει να δηλωθεί ποιό (ανάμεσα σε άλλα) είναι το σύνολο X σε σχέση με το οποίο θεωρούμε το συμπλήρωμα του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εσωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εξωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A^c$.*
Το x χαρακτηρίζεται **συνοριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$ και $N_x(r) \cap A^c \neq \emptyset$.*
Το x χαρακτηρίζεται **οριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$.*
Το x χαρακτηρίζεται **σημείο συσσώρευσης** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

Τώρα θα κάνουμε μερικά σχόλια.

1. *Τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c.*

2. *Τα συνοριακά σημεία του A δεν είναι ούτε εσωτερικά ούτε εξωτερικά σημεία του A και, επίσης, κάθε σημείο του X ανήκει σε μια από τις τρεις κατηγορίες σημείων: εσωτερικό σημείο, εξωτερικό σημείο, συνοριακό σημείο του A. Άρα το X χωρίζεται σε*

τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: τα σύνολα των εσωτερικών, των εξωτερικών και των συνοριακών σημείων του A. Δηλαδή:

$$X = \{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} \cup \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} \cup \{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\}$$

και τα τρία αυτά σύνολα είναι ανά δύο ξένα.

3. *Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του A^c. Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εξωτερικά σημεία του A^c. Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c. Δηλαδή:*

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} = \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A^c\},$$

$$\{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = \{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A^c\},$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\} = \{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A^c\}.$$

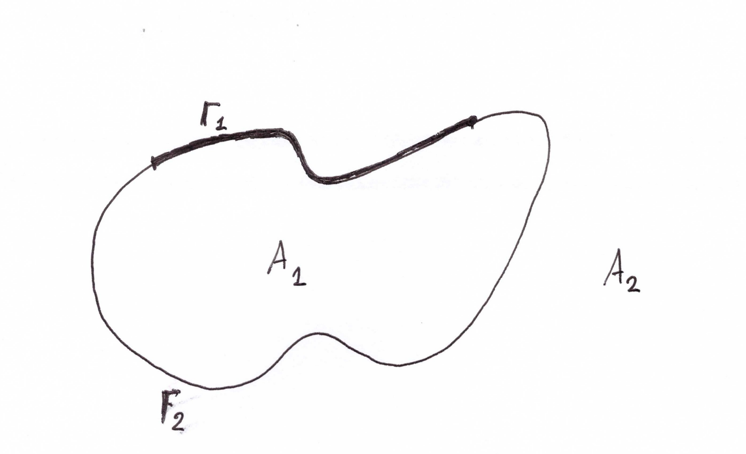
4. *Αφού τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c, απομένει να δούμε που ανήκουν τα συνοριακά σημεία του A. Αυτό εξαρτάται από το συγκεκριμένο κάθε φορά A: κάποια από τα συνοριακά σημεία (μπορεί όλα, μπορεί μερικά, μπορεί κανένα) ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα (μπορεί κανένα, μπορεί μερικά, μπορεί όλα) ανήκουν στο A^c.*

5. *Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία του A. Κανένα εξωτερικό σημείο του A δεν είναι οριακό σημείο του A. Δηλαδή:*

$$\{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\} = \{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} \cup \{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\}.$$

6. *Ένα σημείο συσσώρευσης του A είναι οριακό σημείο του A. Όμως, το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε: μπορεί ένα οριακό σημείο του A να μην είναι σημείο συσσώρευσης του A. Πάντως, ένα οριακό σημείο του A που δεν ανήκει στο A είναι σημείο συσσώρευσης του A.*

Παράδειγμα. Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ και μια απλή σχετικά καμπύλη Γ στο επίπεδο που χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται



στη μια μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Η Γ θα μπορούσε να είναι ένας κύκλος ή μια έλλειψη ή μια ευθεία ή μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή (η περιφέρεια ενός τετραγώνου ή ενός

παραλληλογράμμου, για παράδειγμα). Έστω, επίσης, ότι η Γ διαμερίζεται σε δύο ξένα υποσύνολα: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (όπου ένα από τα Γ_1, Γ_2 μπορεί να είναι κενό, οπότε το άλλο θα είναι ολόκληρη η Γ).
Έστω

$$A = A_1 \cup \Gamma_1, \qquad \text{οπότε} \qquad A^c = A_2 \cup \Gamma_2.$$

Τότε:

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} = A_1, \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = A_2,$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\} = \Gamma, \qquad \{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\} = A_1 \cup \Gamma = A \cup \Gamma.$$

Παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε μια απλή σχετικά επιφάνεια Γ στο $\mathbb{R}^3$ η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μια μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Παραδείγματα τέτοιων Γ είναι ένα επίπεδο, μια σφαιρική επιφάνεια, η επιφάνεια ενός παραλληλεπιπέδου. Και έστω ότι η επιφάνεια Γ διαμερίζεται σε δύο ξένα υποσύνολα: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (όπου ένα από τα Γ_1, Γ_2 μπορεί να είναι κενό, οπότε το άλλο θα είναι ολόκληρη η Γ).
Έστω

$$A = A_1 \cup \Gamma_1, \qquad A^c = A_2 \cup \Gamma_2.$$

Τότε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα στο επίπεδο:

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} = A_1, \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = A_2,$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\} = \Gamma, \qquad \{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\} = A_1 \cup \Gamma = A \cup \Gamma.$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική και θα εξετάσουμε διάφορα χαρακτηριστικά υποσύνολά του.
Αν A είναι οποιοδήποτε από τα $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$, τότε

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} = (a,b), \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = (-\infty,a) \cup (b,+\infty),$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\} = \{a,b\}, \qquad \{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\} = [a,b].$$

Αν A είναι το $[a,+\infty)$ ή το $(a,+\infty)$, τότε

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} = (a,+\infty), \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = (-\infty,a),$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\} = \{a\}, \qquad \{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\} = [a,+\infty).$$

Αν A είναι το $(-\infty,b]$ ή το $(-\infty,b)$, τότε

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} = (-\infty,b), \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = (b,+\infty),$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\} = \{b\}, \qquad \{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\} = (-\infty,b].$$

Αν $A = \{a\}$,

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\} = \emptyset, \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = (-\infty,a) \cup (a,+\infty),$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\} = \{a\}, \qquad \{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\} = \{a\}.$$

Το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα, αφού σε κάθε ανοικτό διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος. Δηλαδή, το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει καμία περιοχή κανενός σημείου και, επομένως, δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο. Από την άλλη μεριά, το $\mathbb{Q}$ τέμνει και μάλιστα σε άπειρα σημεία κάθε περιοχή καθενός σημείου, οπότε κάθε σημείο είναι οριακό σημείο αλλά και σημείο συσσσώρευσης του $\mathbb{Q}$. Τέλος, κάθε περιοχή καθενός σημείου τέμνει το $\mathbb{Q}$ αλλά και το $\mathbb{Q}^c$. Δηλαδή, κάθε σημείο είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{Q}$. Δηλαδή:

$$\{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } \mathbb{Q}\} = \emptyset, \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } \mathbb{Q}\} = \emptyset,$$

$$\{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}, \qquad \{x \,|\, x \text{ οριακό του } \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}.$$