ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 9.2.13. *Έστω $A = B \cup C$.*
(i) *Αν $f : A \to \mathbb{R}$, να αποδείξτε ότι $\|f\|_A \leq \max\{\|f\|_B, \|f\|_C\}$.*
(ii) *Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο B και στο C, να αποδείξετε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.*
Λύση: (i) Έστω $x \in A$. Τότε $x \in B$ ή $x \in C$, οπότε

$$|f(x)| \leq \|f\|_B \quad \text{ή} \quad |f(x)| \leq \|f\|_C,$$

αντιστοίχως.
Άρα
$$|f(x)| \leq \max\{\|f\|_B, \|f\|_C\}.$$
Επομένως, το $\max\{\|f\|_B, \|f\|_C\}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{|f(x)| \mid x \in A\}$ και άρα
$$\|f\|_A \leq \max\{\|f\|_B, \|f\|_C\}.$$
(Παρατήρηση: ισχύει η ισότητα αλλά αυτό είναι ξεχωριστή άσκηση για όποιον ενδιαφέρεται.)
(ii) Από το (i) έχουμε

$$\|f_n - f\|_A \leq \max\{\|f_n - f\|_B, \|f_n - \|_C\} \leq \|f_n - f\|_B + \|f_n - \|_C.$$

Επειδή $\|f_n - f\|_B \to 0$ και $\|f_n - f\|_C \to 0$, συνεπάγεται ότι $\|f_n - f\|_A \to 0$ και άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

Άσκηση 9.2.20. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, ακολουθία (x_n) στο A, $\xi \in A$, $x_n \to \xi$ και f συνεχής στο ξ. Αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(\xi)$.*
Λύση: Το όριο που έχουμε να αποδείξουμε μοιάζει με το $f(x_n) \to f(\xi)$, το οποίο ισχύει διότι η f είναι συνεχής στο ξ.
Γράφουμε
$$|f_n(x_n) - f(\xi)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\xi)|.$$
Γνωρίζουμε ότι
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_A.$$
Άρα
$$0 \leq |f_n(x_n) - f(\xi)| \leq \|f_n - f\|_A + |f(x_n) - f(\xi)|.$$
Τώρα, $\|f_n - f\|_A \to 0$ και, επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, έχουμε $f(x_n) \to f(\xi)$.
Άρα $f_n(x_n) \to f(\xi)$.
Ένα σχετικό "αρνητικό" παράδειγμα είναι με τις συναρτήσεις f_n με τύπους

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{nx}, & \text{αν } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, 1]$ και ότι η συνάρτηση 0 είναι συνεχής στο 0. Έχουμε ακόμη ότι η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ είναι στο $[0, 1]$ και ότι $\frac{1}{n} \to 0$. Αλλά *δεν* είναι σωστό ότι $f_n(\frac{1}{n}) \to 0$, αφού ισχύει $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ για κάθε n.
Εδώ το πρόβλημα είναι ότι η υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0, 1]$ δεν ισχύει.

Τώρα θα αρχίσουμε την μελέτη των σειρών συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

Όλες οι συναρτήσεις f_n είναι ορισμένες στο ίδιο σύνολο A και θεωρούμε τα διαδοχικά μερικά αθροίσματα, δηλαδή τις συναρτήσεις

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

ορισμένες κι αυτές στο A.

Αν υπάρχει συνάρτηση s στο A ώστε $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο A τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει** στη συνάρτηση s **κατά σημείο** στο A ή ότι η συνάρτηση s είναι το **κατά σημείο άθροισμα** της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο A και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Τα ανάλογα ισχύουν για την ομοιόμορφη σύγκλιση και το

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.*

Απόδειξη. Το ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A σημαίνει ότι $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A. Αυτό, όμως, συνεπάγεται ότι $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο A και αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Εδώ έχουμε τις συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = x^n$ και τα μερικά αθροίσματα με τύπους

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$s_n(x) \to \frac{1}{1-x} \qquad \text{για } x \in (-1,1),$$

οπότε $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο $(-1,1)$, όπου s είναι η συνάρτηση με τύπο $s(x) = \frac{1}{1-x}$ για $x \in (-1,1)$.

Άρα

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{1-x} \quad \text{στο } (-1,1).$$

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση πρέπει να ελέγξουμε αν $\|s_n - s\|_{(-1,1)} \to 0$.

Έχουμε για $x \in (-1,1)$ ότι

$$|s_n(x) - s(x)| = \Big|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\Big| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$

Άρα
$$\|s_n - s\|_{(-1,1)} = \sup\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \,\middle|\, x \in (-1,1) \right\} = +\infty,$$
διότι η $\frac{|x|^{n+1}}{1-x}$ δεν είναι φραγμένη στο $(-1,1)$ αφού $\lim_{x\to 1-} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty$.
Άρα $s_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} s$ στο $(-1,1)$ και άρα
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\text{ομ}}{\neq} \frac{1}{1-x} \quad \text{στο } (-1,1).$$
Τώρα, έστω $0 < a < 1$. Θα δούμε τί γίνεται στο διάστημα $[-a,a]$ αντί του διαστήματος $(-1,1)$, όπου το a είναι σταθερό και όσο θέλουμε κοντά στο 1.
Προφανώς, ισχύει $s_n(x) \to s(x)$ για κάθε $x \in [-a,a]$ αφού αυτό ισχύει για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{1-x} \quad \text{στο } [-a,a].$$
Τώρα, όμως, έχουμε
$$\|s_n - s\|_{[-a,a]} = \sup\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \,\middle|\, x \in [-a,a] \right\} = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$
Επειδή το a είναι σταθερό και $0 < a < 1$, έχουμε ότι $\|s_n - s\|_{[-a,a]} \to 0$ όταν $n \to +\infty$.
Άρα $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο $[-a,a]$ και άρα
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\text{ομ}}{=} \frac{1}{1-x} \quad \text{στο } [-a,a].$$