ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Κριτήριο του Weierstrass. *Έστω ότι οι f_n είναι ορισμένες στο A και έστω ότι υπάρχουν αντίστοιχοι αριθμοί M_n ώστε για κάθε n να ισχύει*

$$|f_n(x)| \leq M_n \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Αν η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα (επειδή πρόκειται για σειρά μη-αρνητικών αριθμών),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty,$$

τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει (σε κάποια συνάρτηση) ομοιόμορφα στο σύνολο A.

Απόδειξη. Πρώτα θα δούμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει (σε κάποια συνάρτηση) κατά σημείο στο σύνολο A.
Έστω $x \in A$. Ισχύει $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty,$$

και άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως σε κάποιον αριθμό.
Επομένως, ορίζεται συνάρτηση s στο A με τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \qquad \text{για } x \in A.$$

Και έτσι έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Πράγματι, αν $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, τότε $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) \to s(x)$ (διότι $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$) για κάθε $x \in A$. Άρα $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο A.
Μένει να αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, δηλαδή ότι $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s(x)| &= |(f_1(x) + \cdots + f_n(x)) - (f_1(x) + \cdots)| \\ &= |f_{n+1}(x) + \cdots| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots \leq M_{n+1} + \cdots \qquad \text{για κάθε } x \in A. \end{aligned}$$

Άρα

$$\|s_n - s\|_A = \sup\{|s_n(x) - s(x)| \,|\, x \in A\} \leq M_{n+1} + \cdots .$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$, συνεπάγεται

$$M_{n+1} + \cdots \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Άρα $\|s_n - s\|_A \to 0$, οπότε $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A και άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

□

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Αν θέλουμε να εξετάσουμε την κατά σημείο σύγκλιση της σειράς, σταθεροποιούμε ένα x και εξετάζουμε την σειρά ως σειρά αριθμών.
Μπορούμε, για παράδειγμα, να εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου.
Κατ' αρχάς, για $x = 0$ η σειρά, προφανώς, συγκλίνει. Για $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|} = \frac{n^2}{(n+1)^2}\,|x| \to |x|,$$

οπότε η σειρά συγκλίνει, αν $|x| < 1$, και αποκλίνει, αν $|x| > 1$.
Αν $x = 1$ ή $x = -1$, η σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

αντιστοίχως, και συγκλίνει και στις δύο περιπτώσεις.
Άρα η σειρά συγκλίνει για $x \in [-1,1]$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα x.
Άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $[-1,1]$. Ποιά είναι αυτή συνάρτηση;
Ορίζουμε την συνάρτηση s στο $[-1,1]$ με τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{για } x \in [-1,1]$$

και τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } [-1,1].$$

Για να εξετάσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς, εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Weierstrass.
Θα βρούμε αριθμούς M_n έτσι ώστε να ισχύει $|\frac{x^n}{n^2}| \leq M_n$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$. Ο κάθε αριθμός M_n, δηλαδή το φράγμα της συνάρτησης $\frac{x^n}{n^2}$ στο $[-1,1]$, πρέπει να είναι όσο το δυνατό πιο μικρός ώστε να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$.
Έχουμε, λοιπόν,

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{για } x \in [-1,1]$$

και ο αριθμός $\frac{1}{n^2}$ είναι το μικρότερο δυνατό άνω φράγμα (δηλαδή το supremum) της συνάρτησης $\frac{|x|^n}{n^2}$ στο $[-1,1]$.
Θεωρούμε, λοιπόν,

$$M_n = \frac{1}{n^2}$$

και έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συναρτήσεων που έχουμε συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[-1,1]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \overset{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [-1,1].$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass και γράφουμε

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

οπότε η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Ποιά είναι η συνάρτηση s; Η s ορίζεται με τον τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Για παράδειγμα:

$$s(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n0)}{n^2} = 0,$$

$$s(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n^2} = 0,$$

$$s\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} + \cdots .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση s ομοιόμορφα στο A. Αν κάθε f_n είναι συνεχής στο $\xi \in A$, τότε και η s είναι συνεχής στο ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο A, τότε η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Το ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s \quad \text{στο } A$$

σημαίνει ότι

$$s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s \quad \text{στο } A,$$

όπου $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.
Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο ξ, συνεπάγεται ότι κάθε s_n είναι συνεχής στο ξ και από το ανάλογο θεώρημα για ακολουθίες συναρτήσεων συνεπάγεται ότι η s είναι συνεχής στο ξ. □

Παραδείγματα. Η συνάρτηση που ορίζεται με τον τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{για } x \in [-1, 1]$$

είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.
Ομοίως, η συνάρτηση που ορίζεται με τον τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \qquad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και τα επόμενα δύο Θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Αν κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε και η s είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b s = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n \quad \textit{ή, ισοδύναμα,} \quad \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

Παρατηρήστε την εναλλαγή των συμβόλων της άθροισης και της ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα. Από την

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \overset{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [-1, 1]$$

συνεπάγεται

$$\int_{-1}^{1} s(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \Big)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^n}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-1}^{1} x^n\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

θεωρώντας το υποδιάστημα $[0, 1]$, έχουμε

$$\int_0^1 s(x)\,dx = \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \Big)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 x^n\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι κάθε συνάρτηση f_n είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο ${f_n}'$ συνεχή στο διάστημα I. Υποθέτουμε ότι:*
(i) η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον ένα $\xi \in I$.
(ii) η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} {f_n}'$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση t ομοιόμορφα στο I.
Τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Επίσης, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in I$.

Παρατηρήστε ότι η σχέση $s'(x) = t(x)$ γράφεται

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} {f_n}'(x)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Έχουμε, δηλαδή, εναλλαγή των συμβόλων της άθροισης και της παραγώγισης.