ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 10.1.1. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα στο $[-a, a]$ για κάθε $a > 0$. Τέλος, αποδείξτε ότι η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει (ως σειρά αριθμών) για κάθε x. Γράφουμε:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \Big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως, για κάθε x.
Τώρα ορίζουμε

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x$$

και έτσι ορίζεται η συνάρτηση s στο $\mathbb{R}$ και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Γενικότερο σχόλιο: Μετά από τα διάφορα παραδείγματα, πρέπει ήδη να έχει γίνει κατανοητό το εξής.
Όταν έχουμε να αποδείξουμε ότι μια σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο σε ένα σύνολο A, παίρνουμε ένα τυχαίο $x \in A$, το θεωρούμε σταθερό και αποδεικνύουμε ότι η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (φυσικά, σε αριθμό). Κατόπιν, ορίζουμε $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in A$. Έτσι ορίζεται συνάρτηση s στο A και έχουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην s κατά σημείο στο A και γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.

Συνέχεια της λύσης της άσκησης: Τώρα, έστω $a > 0$. Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στο διάστημα $[-a, a]$.
Έχουμε

$$\Big| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \Big| \le \frac{|x|}{n^2} \le \frac{a}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-a, a]$$

και, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2} = a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[-a, a]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \overset{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [-a, a].$$

Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε ότι η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Αν είχαμε αποδείξει ότι η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$,

τότε, επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Όμως, αυτό που έχουμε αποδείξει είναι ότι η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-a,a]$. Άρα η s είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[-a,a]$ και από αυτό θα αποδείξουμε ότι η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τυχόν x_0. Κατόπιν βρίσκουμε ένα a_0 έτσι ώστε το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[-a_0,a_0]$, δηλαδή έτσι ώστε να είναι $x_0 \in (-a_0,a_0)$. Για να το κάνουμε αυτό, αρκεί να πάρουμε $a_0 > |x_0|$.

Τώρα, γνωρίζουμε ότι η s είναι συνεχής στο $[-a_0,a_0]$ και, επομένως, η s είναι συνεχής στο x_0.

Προσέξτε: φροντίζουμε να είναι το x_0 εσωτερικό σημείο του $[-a_0,a_0]$, διότι, αν το x_0 ήταν άκρο του $[-a_0,a_0]$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι συνεχής στο x_0 μόνο από την μία πλευρά του.

Άρα η s είναι συνεχής στο τυχόν x_0, οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 10.1.2. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$.

(i) Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο $[0,+\infty)$.

(ii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

(iii) Αποδείξτε ότι η s είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

(iv) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0+} s(x) = 1$ και, τέλος, ότι η s δεν είναι συνεχής στο 0.

(v) Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

Λύση: (i) Έστω $x \in [0,+\infty)$.

Αν $x=0$, η σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Αν $x>0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$

και, επειδή είναι σειρά μη-αρνητικών όρων, συγκλίνει.

Άρα η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και, αν ορίσουμε

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty),$$

έχουμε συνάρτηση s στο $[0,+\infty)$ και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } [0,+\infty).$$

(ii) Τώρα έστω $a>0$. Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στο $[a,+\infty)$. Έχουμε

$$\left|\frac{x}{(nx+1)^2}\right| = \frac{x}{(nx+1)^2} \leq \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{xn^2} \leq \frac{1}{an^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [a,+\infty)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{an^2} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

(iii) Ξέρουμε ότι η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, +\infty)$, όπου $a > 0$, και επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{x}{(nx+1)^2}$ είναι συνεχής στο $[a, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η s είναι συνεχής σε κάθε $[a, +\infty)$.

Θεωρούμε $x_0 \in (0, +\infty)$ και, κατόπιν, ένα κατάλληλο $a_0 > 0$ ώστε το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$. Δηλαδή, παίρνουμε κάποιο a_0 με $0 < a_0 < x_0$. Επειδή η s είναι συνεχής στο $[a_0, +\infty)$, είναι συνεχής στο x_0.

Άρα η s είναι συνεχής στο τυχόν $x_0 \in (0, +\infty)$, οπότε είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Για να αποδείξουμε κάτι για την παραγωγισιμότητα της s, πρέπει να κοιτάξουμε την σειρά των παραγώγων συναρτήσεων, η οποία είναι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{x}{(nx+1)^2}\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx}{(nx+1)^3}.$$

Για $x = 0$ η σειρά αυτή δεν συγκλίνει: $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Για τυχόν $x > 0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|\frac{1-nx}{(nx+1)^3}\Big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+nx}{(nx+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx+1)^2} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx}{(nx+1)^3}$ συγκλίνει.

Άρα η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση t κατά σημείο στο $(0, +\infty)$ και η t έχει τύπο

$$t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx}{(nx+1)^3} \qquad \text{για } x \in (0, +\infty).$$

Τώρα θα δούμε ότι η συνάρτηση t είναι η παράγωγος της συνάρτησης s στο $(0, +\infty)$.

Έστω $a > 0$. Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στην σειρά των παραγώγων συναρτήσεων στο $[a, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \Big|\Big(\frac{x}{(nx+1)^2}\Big)'\Big| &= \Big|\frac{1-nx}{(nx+1)^3}\Big| \le \frac{1+nx}{(nx+1)^3} \\ &= \frac{1}{(nx+1)^2} \le \frac{1}{n^2x^2} \le \frac{1}{n^2a^2} \qquad \text{για } x \in [a, +\infty) \end{aligned}$$

και, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2a^2} = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει στην συνάρτηση t ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Επειδή η σειρά των αρχικών συναρτήσεων συγκλίνει για ένα τουλάχιστον $\xi \in [a, +\infty)$ (έχουμε δει ότι συγκλίνει για κάθε $x \in [a, +\infty)$), συνεπάγεται ότι η συνάρτηση s είναι παραγωγίσιμη στο $[a, +\infty)$ και ότι ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

Τώρα, όπως στην περίπτωση της συνέχειας, θα εκμεταλλευτούμε ότι το a είναι τυχών θετικός αριθμός.

Έστω $x_0 \in (0, +\infty)$. Θεωρούμε ένα κατάλληλο $a_0 > 0$ ώστε το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$. Επειδή η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a_0, +\infty)$ και ισχύει $s'(x) =$

$t(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, η s είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $s'(x_0) = t(x_0)$.
Επειδή το $x_0 \in (0, +\infty)$ είναι τυχόν, η s είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$s'(x) = t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - nx}{(nx+1)^3} \qquad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Για να δούμε ότι η s είναι δυο φορές παραγωγίσμη στο $(0, +\infty)$ ή, ισοδύναμα, ότι η t είναι παραγωγίσμη στο $(0, +\infty)$, επαναλαμβάνουμε ό,τι κάναμε προηγουμένως αλλά για την σειρά των παραγώγων συναρτήσεων της σειράς συναρτήσεων που ορίζει την t, δηλαδή την

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1 - nx}{(nx+1)^3}\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2x - 4n}{(nx+1)^4}.$$

Για τυχόν $x > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|\frac{2n^2x - 4n}{(nx+1)^4}\Big| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2x + 4n}{(nx+1)^4} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2x + 4n}{(nx+1)^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{(nx+1)^3} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n^3x^3} \\ &= \frac{4}{x^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,\end{aligned}$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2x-4n}{(nx+1)^4}$ συγκλίνει.
Άρα η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση u κατά σημείο στο $(0, +\infty)$ και η u έχει τύπο

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2x - 4n}{(nx+1)^4} \qquad \text{για } x \in (0, +\infty).$$

Τώρα θα δούμε ότι η συνάρτηση u είναι η παράγωγος της συνάρτησης t στο $(0, +\infty)$.
Έστω $a > 0$. Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στην σειρά των παραγώγων συναρτήσεων στο $[a, +\infty)$:

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\frac{1 - nx}{(nx+1)^3}\Big)'\Big| = \Big|\frac{2n^2x - 4n}{(nx+1)^4}\Big| &\leq \frac{2n^2x + 4n}{(nx+1)^4} \\ &\leq \frac{4n^2x + 4n}{(nx+1)^4} = \frac{4n}{(nx+1)^3} \leq \frac{4n}{n^3x^3} \leq \frac{4}{n^2a^3} \qquad \text{για } x \in [a, +\infty)\end{aligned}$$

και, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2a^3} = \frac{4}{a^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει στην συνάρτηση u ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Επειδή η σειρά των αρχικών συναρτήσεων συγκλίνει για ένα τουλάχιστον $\xi \in [a, +\infty)$ (έχουμε δει ότι συγκλίνει για κάθε $x \in [a, +\infty)$), συνεπάγεται ότι η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο $[a, +\infty)$ και ότι ισχύει $t'(x) = u(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
Τώρα, έστω $x_0 \in (0, +\infty)$. Θεωρούμε ένα κατάλληλο $a_0 > 0$ ώστε το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$. Η t είναι παραγωγίσιμη στο $[a_0, +\infty)$ και ισχύει $t'(x) = u(x)$

για κάθε $x \in [a, +\infty)$, οπότε η t είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $t'(x_0) = u(x_0)$. Επειδή το $x_0 \in (0, +\infty)$ είναι τυχόν, η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$s''(x) = t'(x) = u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2x - 4n}{(nx+1)^4} \qquad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Άρα η s είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επαγωγικά και μπορεί να αποδειχθεί ότι η s είναι άπειρες φορές παραγωγίσμη στο $(0, +\infty)$. Μπορείτε, αν θέλετε, να δοκιμάσετε την επόμενη παράγωγο. Θα παρατηρήσετε ότι και πάλι η κατάσταση θα κριθεί από την σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
Παρένθεση: Αν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η αρχική σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ (και όχι μόνο στο $[a, +\infty)$) θα πρέπει να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στο $[0, +\infty)$. Πρέπει, δηλαδή, να βρούμε αριθμούς M_n ώστε να ισχύει $|\frac{x}{(nx+1)^2}| \leq M_n$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και οι M_n να είναι αρκετά μικροί ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ να συγκλίνει. Θα βρούμε, λοιπόν, το μικρότερο δυνατό M_n, δηλαδή το μικρότερο φράγμα της μη-αρνητικής συνάρτησης $\frac{x}{(nx+1)^2}$ στο $[0, +\infty)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο $(\frac{x}{(nx+1)^2})' = \frac{1-nx}{(nx+1)^3}$ και βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\frac{x}{(nx+1)^2}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n}, +\infty)$, οπότε έχει μέγιστη τιμή στο $x = \frac{1}{n}$, η οποία είναι ίση με $\frac{1}{4n}$. Επομένως, το $M_n = \frac{1}{4n}$ είναι το ελάχιστο M_n που μπορούμε να βρούμε. Δυστυχώς, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$ δεν συγκλίνει. Άρα το Κριτήριο του Weierstrass αποτυγχάνει να αποδείξει ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.
Προσέξτε: Αυτό δεν σημαίνει ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$. Δεν αποκλείεται να υπάρχει άλλος τρόπος, διαφορετικός από το Κριτήριο του Weierstrass, που να αποδεικνύει την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς. Μάλιστα, στο βιβλίο υπάρχουν και τα Κριτήρια των Dirichlet και Abel που χρησιμεύουν για την απόδειξη της ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων σε διάφορες περιπτώσεις στις οποίες δεν δίνει συμπέρασμα το Κριτήριο του Weierstrass.
Συνεχίζουμε με την λύση της άσκησης:
(iv) Για να υπολογίσουμε τα όρια της s στο 0 και στο $+\infty$, θα προσπαθήσουμε να βρούμε κάποιες καλές εκτιμήσεις για την s και θα θυμηθούμε το Ολοκληρωτικό Κριτήριο για εκτιμήσεις σειρών.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > 0$ οι όροι της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$$

είναι μη-αρνητικοί και ότι φθίνουν όταν το n μεγαλώνει. Επομένως, θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(t) = \frac{x}{(tx+1)^2} \qquad \text{για } t \geq 1$$

η οποία είναι φθίνουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει

$$f(n) = \frac{x}{(nx+1)^2} \qquad \text{για κάθε φυσικό } n.$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(tx+1)^2}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \leq \frac{x}{(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{x}{(tx+1)^2}\,dt. \tag{1}$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(tx+1)^2}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \frac{1}{x+1}.$$

Άρα η (1) γράφεται:

$$\frac{1}{x+1} \le s(x) \le \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{(x+1)^2} \qquad \text{για κάθε } x>0.$$

Τώρα, από την ιδιότητα παρεμβολής έχουμε αμέσως ότι

$$\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0+} s(x) = 1.$$

Επειδή $s(0)=0$, η s δεν είναι συνεχής στο 0.

(v) Τέλος, αν η αρχική σειρά συναρτήσεων συνέκλινε στην s ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$, επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{x}{(nx+1)^2}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, θα συνεπαγόταν ότι η s είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Όμως, μόλις είδαμε ότι η s δεν είναι συνεχής στο 0.