ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. [α] Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $-2x+5$, $\sqrt{x^2+1}$, $\sin x$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

   [β] Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\sin \frac{1}{x}$, $\sin(x^2)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0, +\infty)$.

2. Έστω $A \subseteq B$ και $f : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο A.

3. Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

4. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αποδείξτε ότι για κάθε δυο ακολουθίες (x_n'), (x_n'') στο A ώστε $x_n' - x_n'' \to 0$ ισχύει $f(x_n') - f(x_n'') \to 0$.

5. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η (x_n) στο A είναι ακολουθία Cauchy, αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν τα $[c_1, d_1], \ldots, [c_n, d_n]$ είναι ξένα ανά δύο (εκτός κοινών άκρων) και περιέχονται στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $\int_{c_1}^{d_1} f + \cdots + \int_{c_n}^{d_n} f \leq \int_a^b f$.

2. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{1+t^5}{1+t^6}\, dt$, $\lim_{x\to0+} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} \frac{1+t^5}{1+t^6}\, dt$.

3. Έστω $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν οι f και h είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $\int_a^b f = \int_a^b h$, αποδείξτε ότι και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b g = \int_a^b f = \int_a^b h$.

4. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε άρρητο $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f = 0$.

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b fg = 0$ για κάθε συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

6. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\left| \int_a^b f - f(\frac{a+b}{2})(b-a) \right| \leq \frac{(b-a)^2 M}{4}$.

7. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

8. Αποδείξτε τα όρια:

   $\sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}} \to \int_0^1 x^p\, dx$ για $p > 0$.

   $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

   $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \to \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

9. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις F για τις οποίες ισχύει $F'(x^3) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $F(1) = 1$.

10. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$ αλλά ότι έχει αόριστα ολοκληρώματα στο $\mathbb{R}$.

11. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f^2 = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της.

12. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_{x'}^{x''} f(t)\, dt \geq 0$ για κάθε $x', x'' \in [a, b]$ με $x' < x''$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

13. [α] Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\, dt$ για κάθε $x > 0$.

    [β] Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 - x \int_1^x f(t)\, dt$ για κάθε $x > 0$.

14. [α] Αποδείξτε ότι ισχύει $e^t > 1 + t$ για κάθε $t \neq 0$.

    [β] Έστω ότι η f έχει παράγωγο συνεχή στο $[0, +\infty)$ και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει

    $$e^{\frac{f(x)}{x}} \leq \frac{1}{x} \int_0^x e^{f'(t)}\, dt$$

    για κάθε $x > 0$.

    Αν υπάρχει $a > 0$ ώστε να ισχύει $e^{\frac{f(a)}{a}} = \frac{1}{a} \int_0^a e^{f'(t)}\, dt$, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x) = cx$ για κάθε $x \in [0, a]$.