

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Θεωρήστε τις συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = e^{-nx}$ στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση f στο $[0, +\infty)$ ώστε $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο $[0, +\infty)$, αλλά $f_n \not\xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$ για κάθε $a > 0$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
2. Θεωρήστε τις συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = nxe^{-nx}$ στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση f στο $[0, +\infty)$ ώστε $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο $[0, +\infty)$, αλλά $f_n \not\xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$ για κάθε $a > 0$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0, +\infty)$. Αν $0 < \delta < 1$, αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε καθένα από τα $[0, 1 - \delta]$, $[1 + \delta, +\infty)$. Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι η (f_n) δεν συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
4. Θεωρήστε τις συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ στο \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f_n'(x) \rightarrow f'(x)$, αν $x \neq 0$, αλλά $f_n'(0) \not\rightarrow f'(0)$. Αποδείξτε ότι η (f_n') συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση g κατά σημείο στο \mathbb{R} . Αποδείξτε με τρεις τρόπους ότι η (f_n') δεν συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
5. Θεωρήστε τις συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ στο $[0, 2]$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0, 2]$. Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. Αποδείξτε ότι η (f_n') συγκλίνει σε κάποια g κατά σημείο στο $[0, 2]$. Αποδείξτε με τρεις τρόπους ότι η (f_n') δεν συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $[0, 2]$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
6. Θεωρήστε τις συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^p}$ στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0, 1]$. Για ποιές τιμές της παραμέτρου p η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0, 1]$; Για ποιές τιμές της παραμέτρου p ισχύει $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.