ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}.$$

   Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε μια συνάρτηση s κατά σημείο στο $(0,+\infty)$.
   Για κάθε $a>0$, αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι η s είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η s είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(0,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} s(x) = +\infty$, οπότε η s δεν είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to +\infty} s(x) = 0$.
   Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$.

2. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx}.$$

   Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε μια συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι η s είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι η s είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $[0,+\infty)$.

3. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \cos nx.$$

   Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε μια συνάρτηση s κατά σημείο στο $(0,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι η s είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
   Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$.

ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1. Είναι η συνάρτηση $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$$

   μετρική στο $\mathbb{R}$;
   Είναι η συνάρτηση $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+4(x_2-y_2)^2}, \qquad \text{όπου } \mathrm{x}=(x_1,x_2),\ \mathrm{y}=(y_1,y_2)$$

   μετρική στο $\mathbb{R}^2$;

2. Θεωρήστε το σύνολο

$$A = [0,1) \cup \left\{ 1 + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο του A στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$. Είναι το A ανοικτό ή κλειστό;

3. Θεωρήστε το σύνολο

$$A = \{(x_1, x_2) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^3 \geq 1\}.$$

Είναι το A κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$;

Θεωρήστε το σύνολο

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \,\middle|\, \frac{1}{x_1} + {x_2}^2 < 1 \right\}.$$

Είναι το A ανοικτό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$;

4. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}, \qquad \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

5. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε ότι

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

6. Έστω ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον μετρικό χώρο (X, d). Αποδείξτε ότι

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \quad \text{στο } \mathbb{R}.$$

7. Θεωρήστε το υποσύνολο

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 + x_2 \leq 1, |x_3| \leq 2\}$$

του $\mathbb{R}^3$. Έχει η συνάρτηση με τύπο

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 + x_3} \sin(x_1 x_2)$$

μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;

8. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M, M_1, \ldots, M_n \subseteq X$.

Αν τα $M_1, \ldots, M_n$ είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ είναι συμπαγές.

Βρείτε συμπαγή υποσύνολα $M_1, M_2, \ldots$ του $\mathbb{R}$ ώστε το $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$ να μην είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

9. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$. Αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, αποδείξτε ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

10. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενά M, N συμπαγή υποσύνολα του X. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x' \in M$ και $y' \in N$ ώστε

$$d(x', y') = \inf\{d(x, y) \,|\, x \in M, y \in N\}.$$

11. Έστω φραγμένο υποσύνολο M του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το $\overline{M}$ είναι φραγμένο. Κατόπιν, αποδείξτε ότι τα $\overline{M}$ και ∂M είναι συμπαγή.

(*Υπόδειξη:* Το M περιέχεται σε κάποια κλειστή μπάλα $\overline{N}_{x_0}(r_0)$.)