Μιχάλης Παπαδημητράκης

Αναλυτική χωρητικότητα
Συνεχής αναλυτική χωρητικότητα

1 Παράγωγος στο ∞.

Ας θυμηθούμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση f ορισμένη σε ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου λέμε ότι είναι **αναλυτική στο** ∞ αν είναι αναλυτική σε μια περιοχή του ∞ (χωρίς το ∞), δηλαδή σε σύνολο $U_\infty = \{z \,|\, |z| > r\}$ για κάποιο $r > 0$, αν υπάρχει το $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$ και αν, αφού ορίσουμε

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z),$$

ισχύει $\lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) \in \mathbb{C}$. Τότε το τελευταίο όριο το ονομάζουμε **παράγωγο** της f στο ∞ και ορίζουμε

$$f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)).$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, αν θεωρήσουμε την συνάρτηση g στην αντίστοιχη περιοχή $U_0 = \{w \,|\, 0 < |w| < \frac{1}{r}\}$ του 0 (χωρίς το 0) με τύπο

$$g(w) = f\Big(\frac{1}{w}\Big),$$

τότε από την αναλυτικότητα της f στην U_∞ συνεπάγεται η αναλυτικότητα της g στην U_0. Με την αλλαγή μεταβλητής $z = \frac{1}{w}$ έχουμε

$$\lim_{w\to 0} g(w) = \lim_{w\to 0} f\Big(\frac{1}{w}\Big) = \lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty).$$

Άρα, αν θέσουμε $g(0) = f(\infty)$, τότε η g γίνεται συνεχής και στο 0 και, επίσης, με την ίδια αλλαγή μεταβλητής,

$$g'(0) = \lim_{w\to 0} \frac{g(w) - g(0)}{w} = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) = f'(\infty).$$

Άρα η g είναι αναλυτική στο 0.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ο ορισμός της αναλυτικότητας της f στο ∞ ανάγεται στην αναλυτικότητα της αντίστοιχης g στο 0 και ότι η παράγωγος της f στο ∞ είναι η παράγωγος της g στο 0.

Η g είναι αναλυτική στον δίσκο $U_0 \cup \{0\} = D(0; \frac{1}{r})$, οπότε γράφεται ως δυναμοσειρά

$$g(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots, \qquad |w| < \frac{1}{r},$$

με $a_0 = g(0)$ και $a_1 = g'(0)$.

Επομένως και η f γράφεται ως δυναμοσειρά στην περιοχή $U_\infty \cup \{\infty\} = D(\infty; \frac{1}{r})$ του ∞:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots, \qquad r < |z| \le +\infty,$$

με $a_0 = f(\infty)$ και $a_1 = f'(\infty)$.

Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης της δυναμοσειράς της f σε περιφέρειες $C(0; s)$ κέντρου 0 και ακτίνας $s > r$, έχουμε

$$\int_{C(0;s)} f(z)\,dz = a_0 \int_{C(0;s)} dz + a_1 \int_{C(0;s)} \frac{1}{z}\,dz + a_2 \int_{C(0;s)} \frac{1}{z^2}\,dz + \cdots = 2\pi i a_1,$$

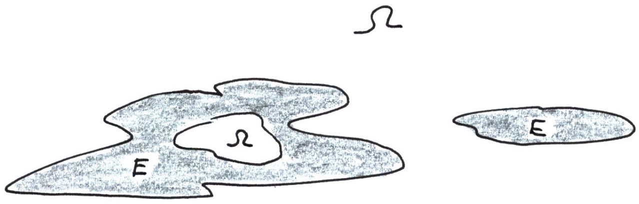
οπότε έχουμε και μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της $f'(\infty)$:

$$f'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0;s)} f(z)\,dz \qquad \text{για μεγάλα } s > 0.$$

2 Αναλυτική και συνεχής αναλυτική χωρητικότητα.

Θεωρούμε ένα συμπαγές $E \subseteq \mathbb{C}$ και το συμπλήρωμα $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$. Το Ω είναι ανοικτό και περιέχει μια περιοχή του ∞. Δείτε το σχήμα 1.

Σχ 1



Επίσης, θεωρούμε δύο χώρους συναρτήσεων στο Ω.

Ο πρώτος χώρος είναι ο $H^\infty(\Omega)$ και αποτελείται από τις f οι οποίες είναι αναλυτικές και φραγμένες στο Ω,

$$H^\infty(\Omega) = \{f \mid f \text{ αναλυτική και φραγμένη στο } \Omega\}.$$

Ο $H^\infty(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος και με την νόρμα

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|, \qquad f \in H^\infty(\Omega)$$

είναι χώρος Banach.

Ο δεύτερος χώρος είναι ο $A(\Omega)$ και αποτελείται από τις f οι οποίες είναι αναλυτικές στο Ω και επεκτείνονται συνεχώς στο $\overline{\Omega}$,

$$A(\Omega) = \{f \mid f \text{ αναλυτική στο } \Omega \text{ και επεκτείνεται συνεχώς στο } \Omega\}.$$

Αν μια f επεκτείνεται συνεχώς από το Ω στο $\overline{\Omega}$, τότε, επειδή το $\overline{\Omega}$ είναι συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\widehat{\mathbb{C}}$), η f είναι φραγμένη στο $\overline{\Omega}$ και άρα και στο Ω. Άρα ο $A(\Omega)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $H^\infty(\Omega)$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο $A(\Omega)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $H^\infty(\Omega)$, οπότε κι αυτός είναι χώρος Banach. Εννοείται ότι και στον $A(\Omega)$ θεωρούμε την ίδια νόρμα $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|$ για την οποία, ειδικά για τις συναρτήσεις που επεκτείνονται συνεχώς από το Ω στο $\overline{\Omega}$, ισχύει

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|, \qquad f \in A(\Omega).$$

Θεωρούμε γνωστό το ότι μια f αναλυτική (ή και απλώς συνεχής) στο Ω επεκτείνεται συνεχώς στο $\overline{\Omega}$ αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Ω. Επίσης, είναι άμεσο πόρισμα του θεωρήματος του Tietze το ότι, αν μια f είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, τότε αυτή επεκτείνεται συνεχώς στο $\widehat{\mathbb{C}} = \Omega \cup E$ και, μάλιστα, η επέκταση μπορεί να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει $\sup_{z\in\widehat{\mathbb{C}}} |f(z)| = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \{f \mid f \text{ αναλυτική και ομοιόμορφα συνεχής στο } \Omega\} \\ &= \{f \mid f \text{ αναλυτική στο } \Omega \text{ και επεκτείνεται συνεχώς στο } \widehat{\mathbb{C}}\}. \end{aligned}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f στους χώρους $H^\infty(\Omega)$ και $A(\Omega)$ είναι αναλυτικές στο ∞, έχει νόημα γι αυτές η $f'(\infty)$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε την **αναλυτική χωρητικότητα** του E

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| \mid f \in H^\infty(\Omega), \|f\|_\infty \leq 1\}$$

και την **συνεχή αναλυτική χωρητικότητα** του E

$$\alpha(E) = \sup\{|f'(\infty)| \mid f \in A(\Omega), \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Τώρα θα δούμε μερικές πρώτες, απλές ιδιότητες των γ και α.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1. [α] *$\alpha(E) \leq \gamma(E)$ για κάθε συμπαγές $E \subseteq \mathbb{C}$.*
[β] *$\gamma(E) \leq \gamma(E')$ και $\alpha(E) \leq \alpha(E')$ για κάθε συμπαγή $E, E' \subseteq \mathbb{C}$ με $E \subseteq E'$.*
[γ] *$\gamma(\lambda E + \mu) = |\lambda|\gamma(E)$ και $\alpha(\lambda E + \mu) = |\lambda|\alpha(E)$ για κάθε συμπαγές $E \subseteq \mathbb{C}$ και κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. [α] Αυτό είναι προφανές, διότι $A(\Omega) \subseteq H^\infty(\Omega)$.
[β] Κι αυτό είναι προφανές, αφού, αν θεωρήσουμε το $\Omega' = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E'$, τότε $\Omega' \subseteq \Omega$ και, επομένως, $H^\infty(\Omega) \subseteq H^\infty(\Omega')$ και $A(\Omega) \subseteq A(\Omega')$.
[γ] Αν $E' = \lambda E + \mu$ και $\Omega' = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E'$, τότε $\Omega' = \lambda\Omega + \mu$.
Τώρα, μια f ανήκει στον $H^\infty(\Omega)$ ή στον $A(\Omega)$ αν και μόνο αν η αντίστοιχη g, η οποία σχετίζεται με την f μέσω του

$$g(z') = f\Big(\frac{z'-\mu}{\lambda}\Big), \qquad z' \in \Omega',$$

ανήκει στον $H^\infty(\Omega')$ ή στον $A(\Omega')$, αντιστοίχως. Μάλιστα, οι f, g έχουν την ίδια νόρμα:

$$\|g\|_\infty = \sup_{z' \in \Omega'} |g(z)| = \sup_{z' \in \Omega'} \Big|f\Big(\frac{z'-\mu}{\lambda}\Big)\Big| = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \|f\|_\infty.$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι φανερό από το ότι

$$\begin{aligned} g'(\infty) &= \lim_{z' \to \infty} z'(g(z') - g(\infty)) = \lim_{z' \to \infty} \frac{\lambda z'}{z'-\mu}\,\frac{z'-\mu}{\lambda}\Big(f\Big(\frac{z'-\mu}{\lambda}\Big) - f(\infty)\Big) \\ &= \lambda \lim_{z \to \infty} z(f(z) - f(\infty)) = \lambda f'(\infty) \end{aligned}$$

από το οποίο έχουμε $|g'(\infty)| = |\lambda||f'(\infty)|$. □

3 Μερικές λίγο πιο βαθειές ιδιότητες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. *Ο $H^\infty(\Omega)$ περιέχει μόνο τις σταθερές συναρτήσεις αν και μόνο αν $\gamma(E) = 0$. Ομοίως, ο $A(\Omega)$ περιέχει μόνο τις σταθερές συναρτήσεις αν και μόνο αν $\alpha(E) = 0$.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση της πρότασης είναι προφανής: για κάθε σταθερή f στο Ω ισχύει $f(z) = f(\infty)$ στο Ω και άρα $f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) = 0$.
Τώρα, έστω ότι ο $H^\infty(\Omega)$ ή ο $A(\Omega)$ περιέχει μια μη-σταθερή f.
Τότε η $g = f - f(\infty)$ είναι μη-σταθερή και ανήκει στον $H^\infty(\Omega)$ ή στον $A(\Omega)$, αντιστοίχως. Ισχύει $g(\infty) = 0$ και άρα υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $g(z_0) \neq 0$. Ορίζουμε την

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}, & \text{αν } z \in \Omega,\, z \neq z_0 \\ g'(z_0), & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

και τότε η h ανήκει στον $H^\infty(\Omega)$ ή στον $A(\Omega)$, αντιστοίχως. Επίσης, είναι $h(\infty) = 0$ και άρα

$$h'(\infty) = \lim_{z\to\infty} zh(z) = \lim_{z\to\infty} z\,\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = -g(z_0).$$

Συνεπάγεται $|h'(\infty)| = |g(z_0)| > 0$, οπότε η h δεν είναι σταθερή στο Ω και άρα $\|h\|_\infty > 0$.
Τέλος, ορίζουμε την $k = \frac{1}{\|h\|_\infty} h$ η οποία ανήκει στον $H^\infty(\Omega)$ ή στον $A(\Omega)$, αντιστοίχως. Προφανώς, είναι $\|k\|_\infty = 1$ και άρα

$$\gamma(E) \text{ ή } \alpha(E) \geq |k'(\infty)| = \frac{1}{\|h\|_\infty}|h'(\infty)| > 0.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2. *Ισχύει*

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| \,|\, f \in H^\infty(\Omega), \|f\|_\infty \le 1, f(\infty) = 0\},$$

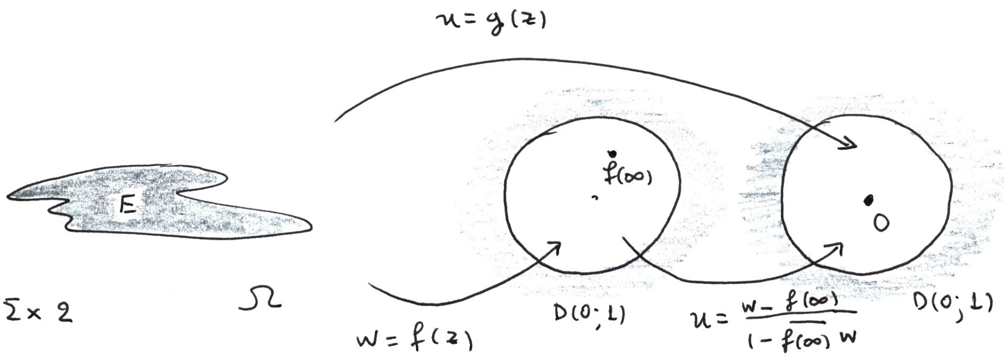
$$\alpha(E) = \sup\{|f'(\infty)| \,|\, f \in A(\Omega), \|f\|_\infty \le 1, f(\infty) = 0\}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\gamma_0(E) = \sup\{|f'(\infty)| \,|\, f \in H^\infty(\Omega), \|f\|_\infty \le 1, f(\infty) = 0\}.$$

Προφανώς, $\gamma_0(E) \le \gamma(E)$.
Έστω τυχούσα f στον $H^\infty(\Omega)$ με $\|f\|_\infty \le 1$.
Δείτε το σχήμα 2. Αν $|f(\infty)| < 1$, τότε ορίζουμε την g με τύπο

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\infty)}{1 - \overline{f(\infty)} f(z)}, \qquad z \in \Omega.$$



Η g ανήκει στον $H^\infty(\Omega)$ και $\|g\|_\infty \le 1$. Επίσης, ισχύει $g(\infty) = 0$ και, επομένως,

$$\gamma_0(E) \ge |g'(\infty)|.$$

Όμως,

$$g'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z g(z) = \lim_{z\to\infty} z \frac{f(z) - f(\infty)}{1 - \overline{f(\infty)} f(z)} = \frac{f'(\infty)}{1 - |f(\infty)|^2}$$

και άρα

$$\gamma_0(E) \ge \frac{|f'(\infty)|}{1 - |f(\infty)|^2} \ge |f'(\infty)|.$$

Αν $|f(\infty)| = 1$, τότε η $|f|$ έχει σημείο μεγίστου στο ∞, οπότε είναι σταθερή κοντά στο ∞ και άρα $f'(\infty) = 0$. Επομένως, πάλι ισχύει

$$\gamma_0(E) \ge |f'(\infty)|.$$

Επειδή η $\gamma_0(E) \ge |f'(\infty)|$ ισχύει για κάθε f στον $H^\infty(\Omega)$ με $\|f\|_\infty \le 1$, έχουμε $\gamma_0(E) \ge \gamma(E)$.
Από τις $\gamma_0(E) \le \gamma(E)$ και $\gamma_0(E) \ge \gamma(E)$ συνεπάγεται η $\gamma_0(E) = \gamma(E)$.
Η απόδειξη για την $\alpha(E)$ είναι ταυτόσημη. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. *Πάντοτε υπάρχει μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την $\gamma(E)$.*

Απόδειξη. Υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων (f_n) στον $H^\infty(\Omega)$ ώστε να είναι $\|f_n\|_\infty \leq 1$ για κάθε n και $|f_n{}'(\infty)| \to \gamma(E)$.
Από το θεώρημα του Montel συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία (f_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Τότε η f ανήκει κι αυτή στον $H^\infty(\Omega)$ και ισχύει $\|f\|_\infty \leq 1$ και $f_{n_k}{}'(\infty) \to f'(\infty)$.
Άρα $|f'(\infty)| = \gamma(E)$ και, επομένως, η f είναι μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την $\gamma(E)$. □

Σχόλιο. Άρα έχουμε
$$\alpha(E) \leq \gamma(E) < +\infty$$
για κάθε συμπαγές $E \subseteq \mathbb{C}$.

Σχόλιο. Αν $\gamma(E) > 0$, τότε παρατηρώντας προσεκτικά την απόδειξη της πρότασης 3.2, συμπεραίνουμε ότι για οποιαδήποτε μεγιστοποιούσα συνάρτηση f για την $\gamma(E)$ ισχύει $f(\infty) = 0$.

Σχόλιο. Το πρόβλημα της μοναδικότητας της μεγιστοποιούσας συνάρτησης για την $\gamma(E)$ έχει θετική λύση. Στην επόμενη ενότητα θα το δούμε σε μια ειδική περίπτωση συνόλων E. Ίσως δούμε και την γενική περίπτωση.

Σχόλιο. Θα δούμε στην επόμενη ενότητα ότι το αποτέλεσμα της πρότασης 3.3 δεν ισχύει για την $\alpha(E)$. Υπάρχουν συμπαγή E για τα οποία δεν υπάρχει μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την $\alpha(E)$. Θα δούμε, επίσης, μια ειδική περίπτωση συνόλων E για τα οποία ισχύει η ύπαρξη (και η μοναδικότητα) μεγιστοποιούσας συνάρτησης για την $\alpha(E)$.

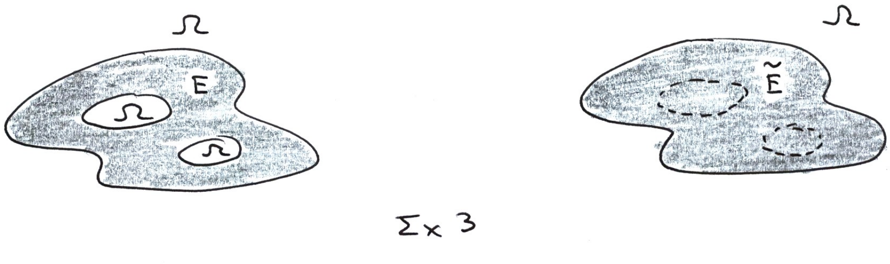
4 Η σχέση με το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann.

Σ' αυτήν την ενότητα θα δούμε, επιτέλους, κάποια παραδείγματα υπολογισμού της αναλυτικής και της συνεχούς αναλυτικής χωρητικότητας συνόλων.

Παράδειγμα 4.1. Έστω μονοσύνολο $E = \{a\}$.
Αν μια f είναι αναλυτική και φραγμένη στο $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$, τότε, επειδή η f είναι φραγμένη κοντά στο a, συνεπάγεται ότι η f ορίζεται και στο a και είναι αναλυτική και στο a. Άρα η f είναι αναλυτική στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville, είναι σταθερή.
Άρα ο $H^\infty(\Omega)$ αποτελείται μόνο από σταθερές συναρτήσεις και από την "εύκολη" κατεύθυνση της πρότασης 3.1 έχουμε ότι $\gamma(E) = 0$. Προφανώς, $\alpha(E) = 0$, επίσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1. *Η $\gamma(E)$ εξαρτάται μόνον από την συνεκτική συνιστώσα του Ω στην οποία ανήκει το ∞.*
Δηλαδή, αν $\widetilde{\Omega}$ είναι η συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το ∞ και το συμπαγές $\widetilde{E} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \widetilde{\Omega}$ είναι η ένωση του E με τις συνεκτικές συνιστώσες του Ω οι οποίες είναι διαφορετικές από την $\widetilde{\Omega}$, τότε
$$\gamma(E) = \gamma(\widetilde{E}).$$

Δείτε το σχήμα 3.



Σχ 3

Απόδειξη. Επειδή $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$, έχουμε $E \subseteq \widetilde{E}$ και άρα $\gamma(E) \leq \gamma(\widetilde{E})$.
Τώρα έστω τυχούσα f στον $H^\infty(\widetilde{\Omega})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$. Ορίζουμε συνάρτηση g στο Ω με τύπο

$$g = \begin{cases} f, & \text{στο } \widetilde{\Omega} \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη συνεκτική συνιστώσα του } \Omega \end{cases}$$

και τότε, επειδή κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω είναι ανοικτό σύνολο, η g είναι αναλυτική στο Ω. Προφανώς, ισχύει $\|g\|_\infty \leq 1$ και άρα

$$|g'(\infty)| \leq \gamma(E).$$

Τέλος, επειδή οι g, f ταυτίζονται κοντά στο ∞, έχουμε $g'(\infty) = f'(\infty)$. Άρα

$$|f'(\infty)| \leq \gamma(E).$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε f στον $H^\infty(\widetilde{\Omega})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$, συνεπάγεται $\gamma(\widetilde{E}) \leq \gamma(E)$.
Από τις $\gamma(E) \leq \gamma(\widetilde{E})$ και $\gamma(\widetilde{E}) \leq \gamma(E)$ συνεπάγεται $\gamma(E) = \gamma(\widetilde{E})$. □

Σχόλιο. Όπως θα δούμε στο παράδειγμα που ακολουθεί, δεν ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα για την $\alpha(E)$.

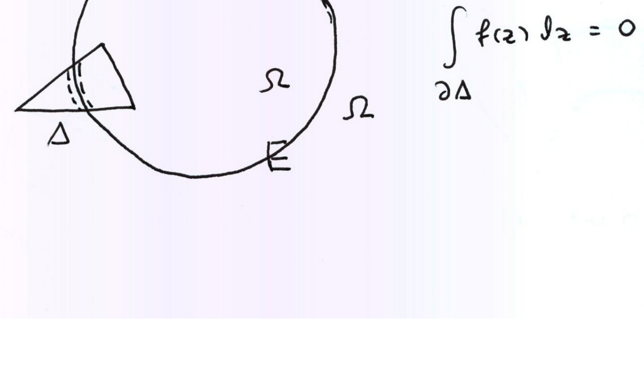
Παράδειγμα 4.2. Έστω $E = C(0; 1)$, η μοναδιαία περιφέρεια με κέντρο 0.
Το Ω αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες: τον δίσκο $D(0; 1) = \{z \,|\, |z| < 1\}$ και το $\{z \,|\, |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Επομένως, $\widetilde{\Omega} = \{z \,|\, |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ και $\widetilde{E} = \overline{D}(0; 1) = \{z \,|\, |z| \leq 1\}$.
Η συνάρτηση $\frac{1}{z}$ είναι αναλυτική και φραγμένη στο $\widetilde{\Omega}$ και δεν είναι σταθερή. Άρα ο $H^\infty(\widetilde{\Omega})$ περιέχει και μη-σταθερές συναρτήσεις, οπότε από τις προτάσεις 3.1 και 4.1 συνεπάγεται

$$\gamma(E) = \gamma(\widetilde{E}) > 0.$$

Η ίδια συνάρτηση $\frac{1}{z}$ είναι αναλυτική και φραγμένη στο $\widetilde{\Omega}$, συνεχής στο $\overline{\widetilde{\Omega}} = \{z \,|\, |z| \geq 1\} \cup \{\infty\}$ και δεν είναι σταθερή. Άρα ο $A(\widetilde{\Omega})$ περιέχει και μη-σταθερές συναρτήσεις, οπότε από την πρόταση 3.1 συνεπάγεται

$$\alpha(\widetilde{E}) > 0.$$

Τώρα, έστω τυχούσα f αναλυτική στο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega} = \Omega \cup C(0; 1) = \widehat{\mathbb{C}}$. Μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Morera αποδεικνύει ότι η f είναι αναλυτική και στα σημεία του $C(0; 1)$, οπότε η f είναι αναλυτική στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Επομένως, η f είναι σταθερή.
Δείτε το σχήμα 4.



Αποδείξαμε ότι ο $A(\Omega)$ αποτελείται μόνο από σταθερές συναρτήσεις και από την πρόταση 3.1 έχουμε ότι

$$\alpha(E) = 0.$$

Σχόλιο. Σε λίγο θα υπολογίσουμε ακριβώς τις τιμές των $\gamma(E) = \gamma(\widetilde{E})$ και $\alpha(\widetilde{E})$ του παραδείγματος 4.2.

Λόγω της πρότασης 4.1, όταν μελετάμε την $\gamma(E)$ μπορούμε να υποθέτουμε ότι το Ω είναι συνεκτικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. *Έστω ότι το συμπαγές E είναι συνεκτικό και όχι μονοσύνολο (δηλαδή το E είναι continuum). Υποθέτουμε, επίσης ότι το Ω είναι συνεκτικό και, επομένως, απλά συνεκτικό. Έστω g η (μοναδική) σύμμορφη απεικόνιση του Ω επί του $D(0;1)$ με $g(\infty) = 0$ και $g'(\infty) > 0$. Τότε*

$$\gamma(E) = g'(\infty).$$

Επειδή η g ανήκει στον $H^\infty(\Omega)$ και $\|g\|_\infty \leq 1$, η g είναι μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την $\gamma(E)$. Επιπλέον, έχουμε και την μοναδικότητα της μεγιστοποιούσας συνάρτησης g με την εξής έννοια: αν η f είναι οποιαδήποτε μεγιστοποιούσα συνάρτηση στον $H^\infty(\Omega)$ για την $\gamma(E)$, τότε υπάρχει αριθμός λ με $|\lambda| = 1$ ώστε να είναι $f = \lambda g$ στο Ω.
Αν, επιπλέον, το σύνορο του E ή, ισοδύναμα, το σύνορο του Ω είναι μια καμπύλη Jordan, τότε έχουμε και

$$\alpha(E) = g'(\infty)$$

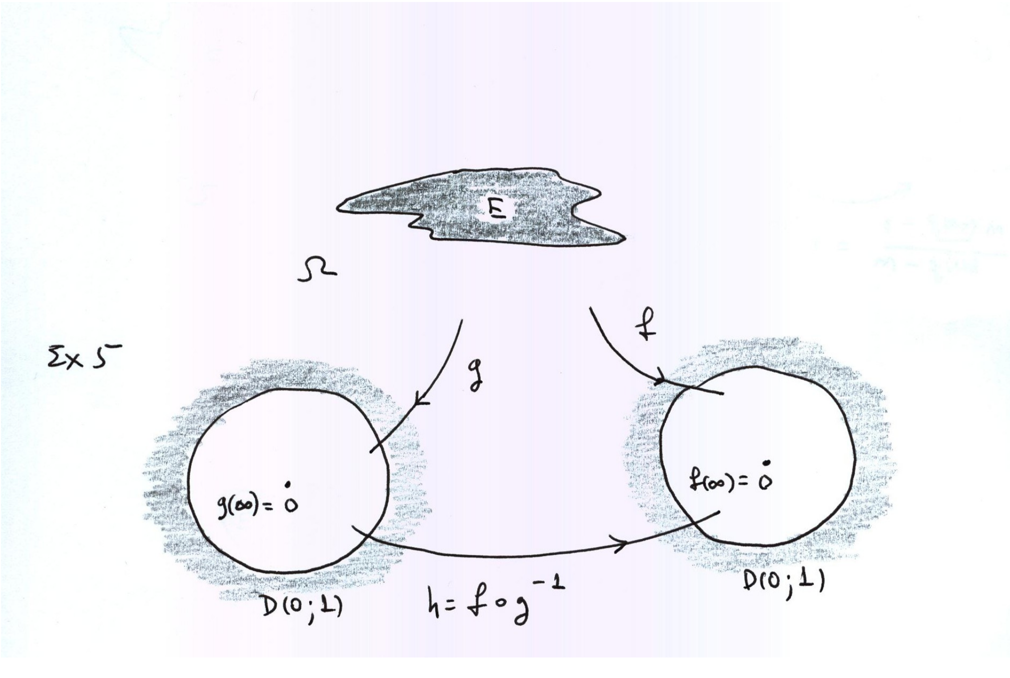
και η ίδια g είναι μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την $\alpha(E)$.

Απόδειξη. Επειδή $g \in H^\infty(\Omega)$ και $\|g\|_\infty \leq 1$, συνεπάγεται $g'(\infty) \leq \gamma(E)$.
Τώρα έστω τυχούσα $f \in H^\infty(\Omega)$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ και $f(\infty) = 0$.
Δείτε το σχήμα 5. Αν ισχύει $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η συνάρτηση

$$h = f \circ g^{-1} : D(0;1) \to D(0;1)$$

είναι αναλυτική στον $D(0;1)$ και ισχύει $h(0) = 0$. Από το Λήμμα του Schwarz συνεπάγεται $|h'(0)| \leq 1$, οπότε $|\frac{f'(\infty)}{g'(\infty)}| \leq 1$. Άρα

$$|f'(\infty)| \leq g'(\infty).$$



Αν ισχύει $|f(z_0)| = 1$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή στο συνεκτικό Ω και, επειδή, $f(\infty) = 0$ έχουμε $f(z_0) = 0$ το οποίο είναι άτοπο.
Επειδή η $|f'(\infty)| \leq g'(\infty)$ ισχύει για κάθε $f \in H^\infty(\Omega)$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ και $f(\infty) = 0$, συνεπάγεται ότι $\gamma(E) \leq g'(\infty)$.
Από τις $g'(\infty) \leq \gamma(E)$ και $\gamma(E) \leq g'(\infty)$ συνεπάγεται $\gamma(E) = g'(\infty)$.
Έστω, τώρα, τυχούσα μεγιστοποιούσα συνάρτηση f στον $H^\infty(\Omega)$ για την $\gamma(E)$. Από το δεύτερο σχόλιο μετά από την πρόταση 3.3 έχουμε ότι $f(\infty) = 0$. Ακριβώς όπως πριν, αποκλείουμε την περίπτωση να ισχύει $|f(z_0)| = 1$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$. Άρα ισχύει $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \Omega$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε και πάλι την ίδια συνάρτηση $h = f \circ g^{-1} : D(0;1) \to D(0;1)$ όπως πριν. Επειδή $|f'(\infty)| = \gamma(E) = g'(\infty)$ συνεπάγεται ότι $|h'(0)| = |\frac{f'(\infty)}{g'(\infty)}| = 1$. Τώρα, πάλι από το Λήμμα του Schwarz έχουμε ότι υπάρχει αριθμός λ με $|\lambda| = 1$ ώστε να είναι $f = \lambda g$ στο Ω.
Τέλος, έστω ότι το σύνορο του Ω είναι καμπύλη Jordan. Τότε, όπως είναι γνωστό, η σύμμορφη απεικόνιση g του Ω επί του $D(0;1)$ επεκτείνεται συνεχώς στο $\overline{\Omega}$ και άρα η g ανήκει στον $A(\Omega)$ (με $\|g\|_\infty \leq 1$). Άρα

$$\gamma(E) = g'(\infty) \leq \alpha(E)$$

οπότε $\alpha(E) = g'(\infty)$. □

Παράδειγμα 4.3. Έστω $E = \overline{D}(0;1) = \{z \,|\, |z| \leq 1\}$ και $\Omega = \{z \,|\, |z| > 1\} \cup \{\infty\}$.
Η συνάρτηση $g(z) = \frac{1}{z}$ είναι η σύμμορφη απεικόνιση του Ω επί του $D(0;1)$ με $g(\infty) = 0$ και $g'(\infty) = \lim_{z\to\infty} zg(z) = 1 > 0$. Άρα

$$\gamma(\overline{D}(0;1)) = \alpha(\overline{D}(0;1)) = 1.$$

Εφαρμόζοντας την πρόταση 2.1[γ], βρίσκουμε για κάθε κλειστό δίσκο ότι

$$\gamma(\overline{D}(z_0;r)) = \alpha(\overline{D}(z_0;r)) = r.$$

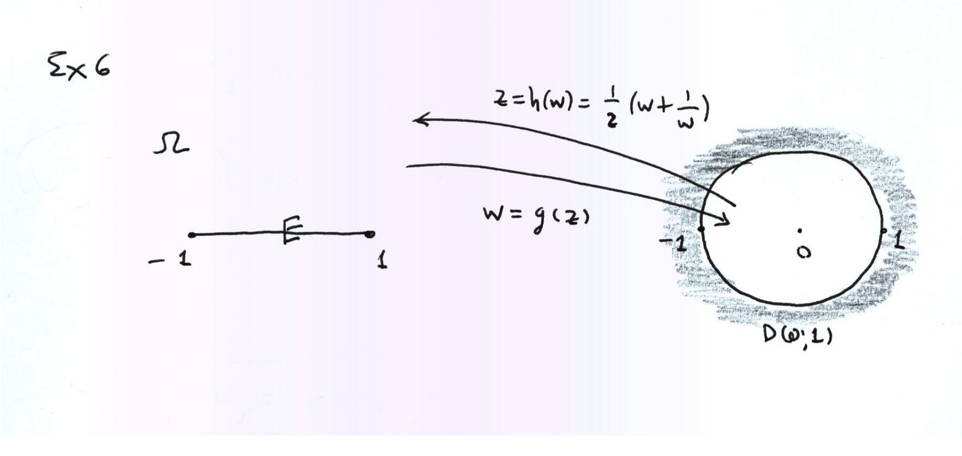
Συνδυάζοντας με το παράδειγμα 4.2, έχουμε και για κάθε περιφέρεια ότι

$$\gamma(C(z_0;r)) = r$$

(και $\alpha(C(z_0;r)) = 0$).

Παράδειγμα 4.4. Έστω $E = [-1,1]$ και $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$.
Δείτε το σχήμα 6. Η συνάρτηση με τύπο $h(w) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$ είναι η σύμμορφη απεικόνιση του $D(0;1)$ επί του Ω με $h(0) = \infty$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση $g = h^{-1}$ είναι η σύμμορφη απεικόνιση του Ω επί του $D(0;1)$ με $g(\infty) = 0$ και

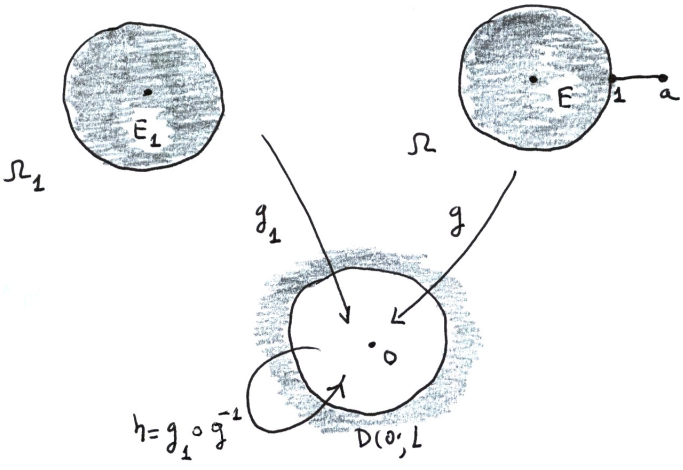
$$g'(\infty) = \lim_{z\to\infty} zg(z) = \lim_{w\to 0} h(w)w = \frac{1}{2}.$$



Άρα
$$\gamma([-1,1]) = \frac{1}{2}.$$
Εφαρμόζοντας την πρόταση 2.1[γ], έχουμε για κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]$ μήκους $l = |a-b|$ ότι
$$\gamma([a,b]) = \frac{l}{4}.$$
Από την άλλη μεριά, μπορούμε να δούμε ότι
$$\alpha([a,b]) = 0.$$
Πράγματι, έστω τυχούσα f αναλυτική στο $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [a,b]$ και συνεχής στο $\overline{\Omega} = \Omega \cup [a,b] = \widehat{\mathbb{C}}$. Από το θεώρημα του Morera συνεπάγεται ότι η f είναι αναλυτική και στα σημεία του $[a,b]$, οπότε η f είναι αναλυτική στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Άρα η f είναι σταθερή. Επομένως, ο $A(\Omega)$ αποτελείται μόνο από σταθερές συναρτήσεις και από την πρόταση 3.1 έχουμε ότι $\alpha([a,b]) = 0$.

Σχόλιο. Σε όσα παραδείγματα είδαμε μέχρι τώρα στα οποία είναι $\alpha(E) < \gamma(E)$ (δηλαδή, όταν το E είναι κύκλος ή ευθύγραμμο τμήμα) ισχύει $\alpha(E) = 0$. Τώρα θα δούμε παράδειγμα με $0 < \alpha(E) < \gamma(E)$.

Παράδειγμα 4.5. Παίρνουμε $E_1 = D(0;1)$ και $E = D(0;1) \cup [1,a]$ με $a > 1$. Δηλαδή στον μοναδιαίο δίσκο επισυνάπτουμε ένα ευθ. τμήμα θετικού μήκους.
Επειδή $E_1 \subseteq E$, έχουμε
$$1 = \gamma(E_1) \leq \gamma(E).$$
Τα E, E_1 είναι συνεκτικά και τα συμπληρώματα $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ και $\Omega_1 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_1$ είναι, επίσης, συνεκτικά. Θεωρούμε τις σύμμορφες απεικονίσεις των Ω, Ω_1 επί του $D(0;1)$
$$g : \Omega \to D(0;1), \quad g_1 : \Omega_1 \to D(0;1)$$
με $g(\infty) = g_1(\infty) = 0$ και $g'(\infty) > 0$, ${g_1}'(\infty) > 0$. Δείτε το σχήμα 7.
Από το θεώρημα 4.1 συνεπάγεται
$$g'(\infty) = \gamma(E), \quad {g_1}'(\infty) = \gamma(E_1).$$
Τώρα έστω ${g_1}'(\infty) = g'(\infty)$.



Σχ 7

Θεωρούμε την

$$h = g_1 \circ g^{-1} : D(0,1) \to D(0;1),$$

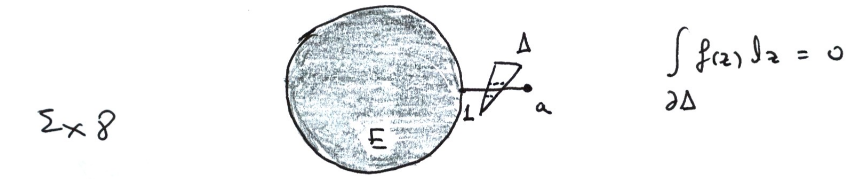
η οποία είναι αναλυτική στο $D(0;1)$ με $h(0) = 0$. Τότε $h'(0) = \frac{g_1'(\infty)}{g'(\infty)} = 1$, οπότε από το Λήμμα του Schwarz συνεπάγεται ότι $h(w) = w$ για κάθε $w \in D(0;1)$. Άρα $g_1(g^{-1}(w)) = w$ για κάθε $w \in D(0;1)$ και άρα $g^{-1}(w) = g_1{}^{-1}(w)$ για κάθε $w \in D(0;1)$. Δηλαδή οι $g^{-1}, g_1{}^{-1}$ ταυτίζονται στο $D(0;1)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα $g_1'(\infty) \neq g'(\infty)$, δηλαδή $\gamma(E_1) \neq \gamma(E)$, οπότε

$$1 = \gamma(E_1) < \gamma(E).$$

Τώρα, έστω οποιαδήποτε $f \in A(\Omega)$ με $\|f\|_\infty \leq 1$. Δείτε το σχήμα 8. Η f είναι αναλυτική στο Ω και συνεχής στα σημεία του $(0,a]$ το οποίο περιέχεται στο Ω. Άρα, βάσει του θεωρήματος του Morera, η f είναι αναλυτική στο Ω_1, οπότε $f \in A(\Omega_1)$. Συνεπάγεται $|f'(\infty)| \leq \alpha(E_1)$ και άρα $\alpha(E) \leq \alpha(E_1)$. Όμως, επειδή $E_1 \subseteq E$, έχουμε

$$\alpha(E) = \alpha(E_1) = 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι $0 < \alpha(E) < \gamma(E)$.

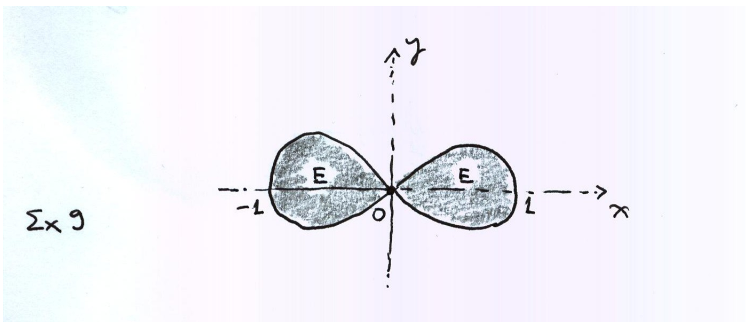


Σχόλιο. Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να βρούμε τη σύμμορφη απεικόνιση $g : \Omega \to D(0;1)$ και να δούμε ότι $\gamma(E) = \frac{a+1}{2} > 1$.

Τώρα θα δούμε παράδειγμα συνόλου E τέτοιο ώστε να μην υπάρχει μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την $\alpha(E)$.

Παράδειγμα 4.6. Δείτε το σχήμα 9. Θεωρούμε το σύνολο

$$E = \{(x,y) \,|\, (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2\} = \{(r,\theta) \,|\, r^2 \leq \cos 2\theta\}.$$



Το E είναι λημνίσκος και αποτελείται από δύο μέρη: το ένα είναι στο τεταρτημόριο $|y| \leq x$ και το άλλο στο τεταρτημόριο $|y| \leq -x$. Τα δύο μέρη έχουν κοινό το σημείο $0 = (0,0)$. Το E είναι συνεκτικό και το συμπλήρωμα $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ είναι, επίσης, συνεκτικό.
Θεωρούμε την σύμμορφη απεικόνιση

$$g : \Omega \to D(0;1)$$

του Ω επί του $D(0;1)$ με $g(\infty) = 0$ και $g'(\infty) > 0$, οπότε από το θεώρημα 4.1 έχουμε

$$\gamma(E) = g'(\infty).$$

Είναι σαφές ότι το Ω είναι συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή ότι $-z \in \Omega$ για κάθε $z \in \Omega$. Επομένως, αν θεωρήσουμε την $g_1 : \Omega \to D(0;1)$ με τύπο $g_1(z) = -g(-z)$, τότε η g_1 είναι σύμμορφη απεικόνιση του Ω επί του $D(0;1)$ με $g_1(\infty) = 0$ και $g_1{}'(\infty) > 0$. Άρα η g_1 ταυτίζεται με την g, οπότε έχουμε

$$g(-z) = -g(z) \qquad \text{για } z \in \Omega.$$

Το σύνορο $\partial\Omega$ αποτελείται από μια λεία κλειστή καμπύλη η οποία αυτοτέμνεται στο σημείο 0. Άρα η g επεκτείνεται συνεχώς στα σημεία του $\partial\Omega$ εκτός ίσως στο σημείο 0. Μάλιστα, οι συνοριακές τιμές της g έχουν μέτρο 1. Επίσης, αν το z προσεγγίζει το 0 από το μέρος του Ω που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο, τότε υπάρχει το όριο η του $g(z)$ και $|\eta| = 1$. Τώρα, αν το z προσεγγίζει το 0 από το μέρος του Ω που βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο, τότε υπάρχει το όριο ζ του $g(z)$ και, επειδή η g είναι περιττή, έχουμε ότι $\zeta = -\eta$. Δηλαδή,

$$\lim_{z\to 0, z\in\Omega, \mathrm{Re}\, z>0} g(z) = \eta, \qquad \lim_{z\to 0, z\in\Omega, \mathrm{Re}\, z<0} g(z) = -\eta.$$

(Αν κάποιος εκμεταλλευτεί τις συμμετρίες του Ω, όπως κάναμε πριν με τη συμμετρία ως προς το 0, μπορεί εύκολα να δει ότι $\eta = i$.)
Τώρα θεωρούμε παράμετρο a με $-1 < a < 1$ και τις συναρτήσεις

$$f_a(z) = g(z)\,\frac{g(z) - a\eta}{1 - a\overline{\eta}g(z)} \qquad \text{για } z \in \Omega.$$

Κάθε f_a είναι αναλυτική στο Ω και $f_a : \Omega \to D(0;1)$ με $f_a(\infty) = 0$ και

$$f_a{}'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z f_a(z) = \lim_{z\to\infty} z g(z)\,\frac{g(z) - a\eta}{1 - a\overline{\eta}g(z)} = -a\eta g'(\infty) = -a\eta\gamma(E).$$

Η f_a επεκτείνεται συνεχώς στα σημεία του $\partial\Omega$ εκτός ίσως στο σημείο 0. Όμως

$$\lim_{z\to 0, z\in\Omega, \mathrm{Re}\, z>0} f_a(z) = \eta\,\frac{\eta - a\eta}{1 - a\overline{\eta}\eta} = \eta^2,$$

$$\lim_{z\to 0, z\in\Omega, \mathrm{Re}\, z<0} f_a(z) = -\eta\,\frac{-\eta - a\eta}{1 + a\overline{\eta}\eta} = \eta^2.$$

Άρα η f_a επεκτείνεται συνεχώς και στο σημείο 0 του $\partial\Omega$, οπότε $f_a \in A(\Omega)$ και, επομένως, $|f_a{}'(\infty)| \leq \alpha(E)$. Δηλαδή

$$|a|\gamma(E) \leq \alpha(E).$$

Παίρνοντας $a \to 1-$ και με δεδομένο ότι $\alpha(E) \leq \gamma(E)$, βρίσκουμε

$$\alpha(E) = \gamma(E).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει μεγιστοποιούσα συνάρτηση f για την $\alpha(E)$. Επειδή $\alpha(E) = \gamma(E)$, η f είναι μεγιστοποιούσα συνάρτηση και για την $\gamma(E)$ και άρα η f είναι σταθερό πολλαπλάσιο της g:

$$f = \lambda g \qquad \text{στο } \Omega$$

με $|\lambda| = 1$.
Όμως, η f επεκτείνεται συνεχώς στο $\partial\Omega$ ενώ η g δεν επεκτείνεται συνεχώς στο $\partial\Omega$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει μεγιστοποιούσα συνάρτηση για την $\alpha(E)$.