

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Φυλλάδιο ασκήσεων 10.

Άσκηση 1: Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $I_1 = \int x^2 \sqrt{x+1} dx,$

(ii) $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}},$

(iii) $I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} dx.$

Άσκηση 2: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x(1-x)^a dx,$ όπου $a > 0.$

Άσκηση 3: Δείξτε, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, ότι για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Άσκηση 4: (i) Έστω $a > 0.$ Δείξτε ότι, αν η f είναι μια άρτια συνάρτηση, τότε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

και ότι, αν η f είναι περιττή, τότε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

(ii) Έστω $n \in \mathbf{N}.$ Δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n (\sin x)^n dx = 2^{-n} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx.$$

Άσκηση 5: Έστω $n \in \mathbf{N}.$ Δείξτε ότι

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n} dx.$$

Άσκηση 6: (i) Δείξτε ότι

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx,$$

για κάθε f συνεχή.

(ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + (\cos x)^2} dx.$$