ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Φυλλάδιο ασκήσεων 5.

Άσκηση 1: Προσδιορίστε, αν υπάρχουν, τις τιμές τού a για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{t}}, & \text{αν } x>0, \\ a^2, & \text{αν } x=0, \\ a+\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin(tx)}{t}, & \text{αν } x<0. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}, & \text{αν } x\neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots, \\ a, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{αν } x\neq 0, \\ a, & \text{αν } x=0. \end{cases}$$

Άσκηση 2: Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις.

$$f(x)=[2x], \quad g(x)=x-[x], \quad h(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{αν } x>0, \\ \frac{\sin(x^2)}{x}, & \text{αν } x<0. \end{cases}$$

Άσκηση 3: Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε x έχουμε

$$\lim_{t\to 0}\left(f(x+t)-f(x-t)\right)=0.$$

Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει: Βρείτε μια ασυνεχή συνάρτηση η οποία έχει την παραπάνω ιδιότητα.

Άσκηση 4: Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x)|<\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\neq 0$. Υπολογίστε την παρακάτω ποσότητα.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\lim_{x\to 0} f\Big(\frac{\sin(nx)}{x}\Big).$$