ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Φυλλάδιο ασκήσεων 6.

Άσκηση 1: Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις.

Άσκηση 2: Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$$

έχει ακριβώς μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

Άσκηση 3: Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

1. $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbf{R}$.
2. $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$, $x \in \mathbf{R}$.
3. $h(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Άσκηση 4: Έστω $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $(f(x))^2+(\sin x)^2 = 1$ για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Δείξτε ότι είτε $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ή $f(x) = -\cos x$ για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Τι γίνεται αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$;

Άσκηση 5: Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $f(x) < 5$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $u < 5$ έτσι ώστε $f(x) < u$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 6: Έστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

Άσκηση 7: Έστω $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ συνεχής. Σταθεροποιούμε $a, b > 0$ τέτοια ώστε $a + b = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = af(0) + bf(1)$.