ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Φυλλάδιο ασκήσεων 8.

Άσκηση 1: Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και η f' είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα.

Άσκηση 2: Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^a}\right)^{x^b}, \qquad \lim_{x\to0+}\left(1+\frac{1}{x^a}\right)^{x^b},$$

όπου $a, b > 0$.

Άσκηση 3: Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Δείξτε ότι

1. $\lim_{p\to0+}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.
2. $\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Άσκηση 4: 1. Δείξτε ότι $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ για κάθε $x > 0$.

2. Αποδείξτε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Άσκηση 5: 1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x\ln x$, $x > 0$, είναι κυρτή.

2. Δείξτε ότι αν $x, y, a, b > 0$ τότε

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \le x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}.$$

Άσκηση 6: Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ κυρτή και κοίλη. Ποια είναι η μορφή τής f;