ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Φυλλάδιο ασκήσεων 9.

Άσκηση 1: Χρησιμοποιήστε διαμέριση $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία και ενδιάμεσα σημεία $\xi_k = x_{k-1}$ $(1 \leq k \leq n)$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a.$$

Άσκηση 2: Υπολογίστε τα όρια:

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n} \Big),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} + \frac{n}{n^2+n^2} \Big).$$

Χρησιμοποιήστε τους τύπους $\int_a^b \frac{1}{x+1} \, dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ $(-1 < a < b)$, $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan b - \arctan a$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

Άσκηση 3: Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2} \, dt, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2} \, dt.$$

(Υπόδειξη: Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της $y = \frac{t}{1+t^2}$ στα αντίστοιχα διαστήματα.)

Άσκηση 4: Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \log \frac{b}{a}$ $(0 < a < b)$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, κατόπιν, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) με

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το 0.

Άσκηση 5: Έστω $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 10|x_2 - x_1|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [0, 1]$.

Αποδείξτε ότι

$$\Big| \int_a^b f(x) \, dx - (b-a)f(b) \Big| \leq 5(b-a)^2$$

για κάθε $[a,b] \subseteq [0,1]$.

Αποδείξτε ότι

$$\Big| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leq \frac{5}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Άσκηση 6: Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$0 \leq \int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

για κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$.