ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 1.

Άσκηση 1: *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-2n-1)=+\infty.$$

Για κάθε $M>0$ *βρείτε τον ελάχιστο φυσικό* n_0 *ώστε* $n^2-2n-1>M$ *για κάθε* $n\geq n_0$.

Λύση: Για να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}(n^2-2n-1)=+\infty$, θα θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο $M>0$ και θα βρούμε κάποιον φυσικό n_0 ώστε να ισχύει $n^2-2n-1>M$ για κάθε $n\geq n_0$.

Θεωρούμε, λοιπόν, έναν $M>0$ και επιδιώκουμε να ισχύει η ανισότητα

$$n^2-2n-1>M.$$

Αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$n^2-2n-(M+1)>0.$$

Από τις στοιχειώδεις ιδιότητες των πολυωνύμων δεύτερου βαθμού, γνωρίζουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$n<1-\sqrt{M+2}\qquad \text{ή}\qquad n>1+\sqrt{M+2}\,.$$

Επειδή μας ενδιαφέρουν οι μεγάλοι φυσικοί n επικεντρώνουμε την προσοχή μας στην δεύτερη ανισότητα και σκεφτόμαστε ότι, από όσα είπαμε μέχρι τώρα,

$$n>1+\sqrt{M+2}\qquad \text{συνεπάγεται}\qquad n^2-2n-1>M.$$

Για ποιούς φυσικούς n ισχύει η $n>1+\sqrt{M+2}$; Επειδή $1+\sqrt{M+2}\geq 0$, ο μικρότερος από τους φυσικούς n που είναι $>1+\sqrt{M+2}$ είναι ο

$$n_0=\left[1+\sqrt{M+2}\right]+1.$$

Επομένως η $n>1+\sqrt{M+2}$ ισχύει για τους φυσικούς $n\geq n_0$ και, επομένως,

$$n\geq n_0\qquad \text{συνεπάγεται}\qquad n^2-2n-1>M.$$

Με άλλα λόγια, αποδείξαμε ότι για κάθε $M>0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να ισχύει $n^2-2n-1>M$ για κάθε $n\geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(n^2-2n-1)=+\infty$.

Άσκηση 2: *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}=0.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ *βρείτε τον ελάχιστο φυσικό* n_0 *ώστε* $\frac{1}{\sqrt{n+3}} < \varepsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$.

Λύση: Για να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$, θα θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον φυσικό n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{1}{\sqrt{n+3}} - 0\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Θεωρούμε, λοιπόν, έναν $\varepsilon > 0$ και θέλουμε να ισχύει η ανισότητα

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+3}} - 0\right| < \varepsilon.$$

Αυτή, μετά από λίγες πράξεις, είναι ισοδύναμη με την

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 3.$$

Για ποιούς φυσικούς n ισχύει η $n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 3$; Ο μικρότερος από τους φυσικούς n που είναι $> \frac{1}{\varepsilon^2} - 3$ είναι ο

$$n_0 = \begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - 3\right] + 1, & \frac{1}{\varepsilon^2} - 3 \geq 0, \\ 1, & \frac{1}{\varepsilon^2} - 3 < 0 \end{cases}$$

ή, ισοδύναμα,

$$n_0 = \begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - 3\right] + 1, & 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \\ 1, & \varepsilon > \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \end{cases}$$

Επομένως, η $n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 3$ ισχύει για τους φυσικούς $n \geq n_0$ και, επομένως,

$$n \geq n_0 \qquad \text{συνεπάγεται} \qquad \left|\frac{1}{\sqrt{n+3}} - 0\right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{1}{\sqrt{n+3}} - 0\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$.

Άσκηση 3: *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+1} = \frac{3}{2}\,.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ *βρείτε τον ελάχιστο φυσικό* n_0 *ώστε* $\left|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$.

Λύση: Για να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$, θα θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον φυσικό n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Θεωρούμε, λοιπόν, έναν $\varepsilon > 0$ και θέλουμε να ισχύει η ανισότητα

$$\left|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

Αυτή, μετά από λίγες πράξεις, είναι ισοδύναμη με την

$$n^2 > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\,.$$

Πρώτη περίπτωση: Αν $\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \geq 0$ ή, ισοδύναμα, $0 < \varepsilon \leq \frac{5}{2}$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη (επειδή $n \geq 1$ και, επομένως, $n \geq 0$) με

$$n > \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}\,.$$

Επειδή $\sqrt{\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}} \geq 0$, ο μικρότερος από τους φυσικούς n που είναι $> \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}$ είναι ο

$$n_0 = \Big[\sqrt{\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}\Big] + 1.$$

Επομένως, στην περίπτωση $0 < \varepsilon \leq \frac{5}{2}$, θεωρούμε $n_0 = \big[\sqrt{\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}\big] + 1$ και τότε

$$n \geq n_0 \qquad \text{συνεπάγεται} \qquad \Big|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\Big| < \varepsilon.$$

Δεύτερη περίπτωση: Αν $\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} < 0$ ή, ισοδύναμα, $\varepsilon > \frac{5}{2}$, η τελευταία ανισότητα ($n^2 > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$) ισχύει για κάθε φυσικό. Επομένως, θεωρούμε $n_0 = 1$ και τότε

$$n \geq n_0 \qquad \text{συνεπάγεται} \qquad \Big|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\Big| < \varepsilon.$$

Συνδυάζοντας τις δυο περιπτώσεις, θεωρούμε

$$n_0 = \begin{cases} \Big[\sqrt{\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}\Big] + 1, & 0 < \varepsilon \leq \frac{5}{2}\,, \\ 1, & \varepsilon > \frac{5}{2}\,. \end{cases}$$

Είδαμε ότι

$$n \geq n_0 \qquad \text{συνεπάγεται} \qquad \Big|\frac{1}{\sqrt{n+3}} - 0\Big| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να ισχύει $\big|\frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2}\big| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$.

Άσκηση 4: *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{2^n} = +\infty.$$

Για κάθε $M > 0$ βρείτε τον ελάχιστο φυσικό n_0 ώστε $2^{2^n} > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Λύση: Για να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} 2^{2^n} = +\infty$, θα θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο $M > 0$ και θα βρούμε κάποιον φυσικό n_0 ώστε να ισχύει $2^{2^n} > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Θεωρούμε έναν $M > 0$ και επιδιώκουμε να ισχύει η ανισότητα

$$2^{2^n} > M.$$

Αυτή (επειδή $M > 0$) είναι ισοδύναμη με την

$$2^n > \log_2 M.$$

Πρώτη περίπτωση: Αν $\log_2 M > 0$ ή, ισοδύναμα, $M > 1$ η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$n > \log_2(\log_2 M).$$

Ο μικρότερος από τους φυσικούς n που είναι $> \log_2(\log_2 M)$ είναι ο

$$n_0 = \begin{cases} \big[\log_2(\log_2 M)\big] + 1, & \log_2(\log_2 M) \geq 0, \\ 1, & \log_2(\log_2 M) < 0, \end{cases}$$

ή, ισοδύναμα,

$$n_0 = \begin{cases} \big[\log_2(\log_2 M)\big] + 1, & M \geq 2, \\ 1, & 1 < M < 2. \end{cases}$$

Άρα, αν $M > 1$, θεωρούμε τον n_0 που μόλις γράψαμε και τότε

$$n \geq n_0 \qquad \text{συνεπάγεται} \qquad 2^{2^n} > M.$$

Δεύτερη περίπτωση: Αν $\log_2 M \leq 0$ ή, ισοδύναμα, $0 < M \leq 1$ η τελευταία ανισότητα ($2^n > \log_2 M$) ισχύει για κάθε φυσικό. Άρα θεωρούμε $n_0 = 1$ και τότε

$$n \geq n_0 \qquad \text{συνεπάγεται} \qquad 2^{2^n} > M.$$

Συνδυάζοντας τις δυο περιπτώσεις, θεωρούμε

$$n_0 = \begin{cases} \big[\log_2(\log_2 M)\big] + 1, & M \geq 2, \\ 1, & 0 < M < 2. \end{cases}$$

Είδαμε ότι

$$n \geq n_0 \qquad \text{συνεπάγεται} \qquad 2^{2^n} > M.$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να ισχύει $2^{2^n} > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} 2^{2^n} = +\infty$.

Άσκηση 5: *Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + (-1)^n$ δεν συγκλίνει.*

Λύση: Οι όροι της ακολουθίας είναι

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = 2,\ a_5 = 0,\ a_6 = 2,\ \ldots$$

και, γενικότερα, $a_n = 0$ για κάθε περιττό φυσικό n και $a_n = 2$ για κάθε άρτιο φυσικό n.

Είναι σαφές ότι οι όροι της ακολουθίας δεν πλησιάζουν κανένα αριθμό, αφού «πηδάνε» από το 0 στο 2 και πάλι στο 0 «επ΄ άπειρον». Για να αποδείξουμε με πιο αυστηρά μαθηματικό τρόπο ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει, υποθέτουμε ότι συγκλίνει και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω, λοιπόν, ότι η (a_n) συγκλίνει και έστω

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

Αυτό σημαίνει ότι **για κάθε** $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Ας θεωρήσουμε έναν $\varepsilon > 0$ και έναν αντίστοιχο n_0. Κατ΄ αρχάς θεωρούμε έναν αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ αλλά κάποια στιγμή θα επιλέξουμε έναν πιο συγκεκριμένο κατάλληλο $\varepsilon > 0$. (Έχουμε αυτό το δικαίωμα, αφού ο ϵ μπορεί να είναι **οποιοσδήποτε** θετικός αριθμός.)

Δεν γνωρίζουμε τον n_0, αλλά σκεφτόμαστε ότι - όποιος κι αν είναι - **υπάρχουν** περιττοί **και** άρτιοι φυσικοί n οι οποίοι είναι $\geq n_0$. Για κάθε περιττό $n \geq n_0$ θα συνεπάγεται

$$|0 - a| = |a_n - a| < \varepsilon$$

και για κάθε άρτιο $n \geq n_0$ θα συνεπάγεται

$$|2 - a| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Άρα ισχύει

$$|a - 0| < \varepsilon \qquad \text{και} \qquad |a - 2| < \varepsilon.$$

Άρα ο (άγνωστος) a απέχει από καθέναν από τους 0 και 2 απόσταση $< \varepsilon$. Είναι, όμως, σαφές ότι, αν ο ε είναι κατάλληλα μικρός αριθμός, αυτό είναι αδύνατο. Πράγματι, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $\varepsilon \leq 1$ (για παράδειγμα: $\varepsilon = 1$ ή $\frac{1}{2}$ ή $\frac{3}{4}$), τότε δεν υπάρχει κανένας a ο οποίος να απέχει από καθέναν από τους 0 και 2 απόσταση $< \varepsilon$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε η ακολουθία δεν συγκλίνει.

Άσκηση 6: *Δίνεται ακολουθία θετικών όρων (a_n) ώστε $a_n \to +\infty$. Είναι σωστό ότι $\log_{10} a_n \to +\infty$;*

Λύση: Η στοιχειώδης εμπειρία που έχουμε από το λύκειο για την λογαριθμική συνάρτηση μας λέει ότι, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίρνει μεγάλες θετικές τιμές, τότε η εξαρτημένη μεταβλητή $y = \log_{10} x$ παίρνει κι αυτή αντίστοιχες μεγάλες θετικές τιμές. Από την υπόθεσή μας, οι όροι a_n παίρνουν (όταν το n τείνει στο $+\infty$) μεγάλες θετικές τιμές, οπότε οι αντίστοιχοι $\log_{10} a_n$ θα παίρνουν κι αυτοί μεγάλες θετικές τιμές. Άρα πρέπει να είναι σωστό ότι $\log_{10} a_n \to +\infty$. Θα το αποδείξουμε με τον ορισμό.

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $M > 0$ και επιδιώκουμε να ισχύει η ανισότητα

$$\log_{10} a_n > M.$$

Αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$a_n > 10^M.$$

(Αναγόμαστε στο a_n επειδή σ΄ αυτό αναφέρεται η υπόθεσή μας.)
Επειδή υποθέτουμε ότι $a_n \to +\infty$ και επειδή ο 10^M είναι ένας θετικός αριθμός, θα πρέπει να υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να ισχύει $a_n > 10^M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\log_{10} a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να ισχύει $\log_{10} a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\log_{10} a_n \to +\infty$.