ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 10.

Άσκηση 1: *Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.*
(i) $I_1 = \int x^2\sqrt{x+1}\,dx$,
(ii) $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$,
(iii) $I_3 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,dx$.

Λύση: (i) Θέτουμε $y = x+1$. Τότε $dx = dy$, άρα

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (y-1)^2\sqrt{y}\,dy = \int (y^2-2y+1)\sqrt{y}\,dy = \int (y^{\frac{5}{2}} - 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\,dy \\ &= \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c. \end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Τότε $x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$, άρα $dx = -\frac{dy}{y^2\sqrt{1-y^2}}$. Επομένως

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int y^3\frac{dy}{y^2\sqrt{1-y^2}} = -\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{(1-y^2)'}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz \\ &= \sqrt{z} + c = \sqrt{1-y^2} + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c. \end{aligned}$$

(iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y+\sqrt{y^3}}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{y}}}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{y}}}(\sqrt{y})'\,dy = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z}} = 2\sqrt{1+z} + c \\ &= 2\sqrt{1+\sqrt{y}} + c = 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + c. \end{aligned}$$

Άσκηση 2: *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $I = \int_0^1 x(1-x)^a\,dx$, *όπου* $a > 0$.

Λύση: Θέτουμε $y = 1-x$. Τότε $dy = -dx$, άρα

$$\begin{aligned} I &= -\int_1^0 (1-y)y^a\,dy = \int_0^1 (1-y)y^a\,dy = \int_0^1 y^a dy - \int_0^1 y^{a+1}\,dy \\ &= \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\,. \end{aligned}$$

Άσκηση 3: *Δείξτε, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, ότι για κάθε $x > 0$ έχουμε*

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Λύση: Θέτουμε $t = \frac{1}{s}$. Τότε $dt = -\frac{ds}{s^2}$. Άρα

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{s^2}} \cdot \frac{ds}{s^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{ds}{1+s^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Άσκηση 4: (i) *Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι, αν η f είναι μια άρτια συνάρτηση, τότε*

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

και ότι, αν η f είναι περιττή, τότε

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

(ii) *Έστω $n \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι*

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n (\sin x)^n\,dx = 2^{-n}\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,dx.$$

Λύση: (i) Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = -x$ (και επομένως $dx = -dy$). Αν η f είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,dx &= \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx\\ &= \int_0^a f(y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Αν η f είναι περιττή, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,dx &= \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx\\ &= -\int_0^a f(y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n (\sin x)^n\,dx &= \int_0^{\pi/2} (2^{-1}\cdot 2\cos x\sin x)^n\,dx\\ &= 2^{-n}\int_0^{\pi/2} (\sin(2x))^n\,dx =: I.\end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα $x = \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}$ (άρα $dx = -\frac{dy}{2}$) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2^{-n}}{2} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)^n dy = \frac{2^{-n}}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^n \, dy \\ &= 2^{-n} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx, \end{aligned}$$

διότι το cos είναι άρτια συνάρτηση.

Άσκηση 5: *Έστω* $n \in \mathbf{N}$. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{n - \frac{1}{2}} dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n} \, dx.$$

Λύση: Θέτουμε $x = \sin t$ (άρα $dx = \cos t \, dt$) και παίρνουμε

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{n - \frac{1}{2}} dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 - (\sin t)^2\right)^{n - \frac{1}{2}} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n} \, dx.$$

Άσκηση 6: (i) *Δείξτε ότι*

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx,$$

για κάθε f *συνεχή.*

(ii) *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + (\cos x)^2} \, dx.$$

Λύση: (i) Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = \pi - u$ $(dx = -du)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx &= -\int_{\pi}^{0} (\pi - u) f(\sin(\pi - u)) \, du \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u) \, du \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin u) \, du - \int_0^{\pi} u f(\sin u) \, du \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx, \end{aligned}$$

και το συμπέρασμα έπεται.

(ii) Έχουμε

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 - (\sin x)^2} \, dx = \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx,$$

όπου

$$f(t) = \frac{t}{2 - t^2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + (\cos x)^2}\, dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\cos' x}{1 + (\cos x)^2}\, dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \pi \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \pi \arctan 1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$