ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 3.

Άσκηση 1: *Αποδείξτε με τον ορισμό ότι:*

1. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$,

2. $\lim_{x\to -\infty} x^3=-\infty$,

3. $\lim_{x\to 1}\ln(x+1)=\ln 2$,

4. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$.

Λύση: 1. Θεωρούμε αυθαίρετο $M>0$ και θέλουμε να βρούμε κάποιον $\delta>0$ έτσι ώστε, αν x είναι στο πεδίο ορισμού της $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ και $0<|x-2|<\delta$, να συνεπάγεται $\frac{1}{(x-2)^2}>M$.

Κατ΄ αρχάς, παρατηρούμε ότι η σχέση $0<|x-2|<\delta$ εξασφαλίζει ότι το x είναι στο πεδίο ορισμού της $y=\frac{1}{(x-2)^2}$, οπότε, απλώς, θέλουμε να βρούμε κάποιον $\delta>0$ έτσι ώστε από την $0<|x-2|<\delta$ να συνεπάγεται $\frac{1}{(x-2)^2}>M$.

Διερευνούμε την $\frac{1}{(x-2)^2}>M$ και βλέπουμε ότι είναι ισοδύναμη με την $|x-2|<\frac{1}{\sqrt{M}}$. Άρα, είναι φανερό ότι, αν επιλέξουμε τον δ έτσι ώστε $0<\delta\leq\frac{1}{\sqrt{M}}$, τότε από την $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται η $|x-2|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $\frac{1}{(x-2)^2}>M$.

2. Θεωρούμε αυθαίρετο $M>0$ και θέλουμε να βρούμε κάποιον $N>0$ έτσι ώστε, αν x είναι στο πεδίο ορισμού της $y=x^3$ και $x<-N$, να συνεπάγεται $x^3<-M$.

Επειδή το πεδίο ορισμού της $y=x^3$ είναι ολόκληρο το $\mathbf{R}$, θέλουμε, απλώς, να βρούμε κάποιον $N>0$ έτσι ώστε από την $x<-N$ να συνεπάγεται $x^3<-M$.

Βλέπουμε ότι η $x^3<-M$ είναι ισοδύναμη με την $x<\sqrt[3]{-M}=-\sqrt[3]{M}$. Άρα, αν επιλέξουμε τον N έτσι ώστε $N\geq\sqrt[3]{M}$, τότε από την $x<-N$ συνεπάγεται η $x<-\sqrt[3]{M}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $x^3<-M$.

3. Θεωρούμε αυθαίρετο $\varepsilon>0$ και θέλουμε να βρούμε κάποιον $\delta>0$ έτσι ώστε, αν x είναι στο πεδίο ορισμού της $y=\ln(x+1)$ – δηλαδή αν $x>-1$ – και $0<|x-1|<\delta$ να συνεπάγεται $|\ln(x+1)-\ln 2|<\varepsilon$.

Βλέπουμε ότι (για $x>-1$) η $|\ln(x+1)-\ln 2|<\varepsilon$ είναι ισοδύναμη με την $\ln 2-\varepsilon<\ln(x+1)<\ln 2+\varepsilon$ κι αυτή με την $2e^{-\varepsilon}<x+1<2e^{\varepsilon}$ κι αυτή με την $2e^{-\varepsilon}-1<x<2e^{\varepsilon}-1$.

Παρατηρούμε ότι $-1<2e^{-\varepsilon}-1<1<2e^{\varepsilon}-1$, δηλαδή ο αριθμός -1 δεν ανήκει στο διάστημα $(2e^{-\varepsilon}-1,2e^{\varepsilon}-1)$ και μάλιστα βρίσκεται αριστερά του διαστήματος, ενώ ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα αυτό. Αν, λοιπόν, βρούμε κάποιον $\delta>0$ έτσι ώστε η ένωση διαστημάτων $(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ να περιέχεται στο διάστημα $(2e^{-\varepsilon}-1,2e^{\varepsilon}-1)$, τότε κάθε x που ικανοποιεί την $0<|x-1|<\delta$ θα ικανοποιεί και την $x>-1$ και την $2e^{-\varepsilon}-1<x<2e^{\varepsilon}-1$.

Επιλέγουμε, λοιπόν, τον $\delta > 0$ έτσι ώστε να είναι *το πολύ* τόσος όση η απόσταση του 1 από το κοντινότερο προς αυτόν άκρο του διαστήματος $(2e^{-\varepsilon}-1, 2e^{\varepsilon}-1)$. Δηλαδή, επιλέγουμε

$$0 < \delta \leq \min\{1-(2e^{-\varepsilon}-1), (2e^{\varepsilon}-1)-1\} = \min\{2-2e^{-\varepsilon}, 2e^{\varepsilon}-2\} = 2-2e^{-\varepsilon}.$$

(Για την τελευταία ισότητα αποδεικνύουμε με λίγες πράξεις ότι $2-2e^{-\varepsilon} \leq 2e^{\varepsilon}-2$.)

Ανακεφαλαιώνουμε: Επιλέγουμε κάποιον (οποιονδήποτε) δ ώστε $0 < \delta \leq 2-2e^{-\varepsilon}$. Τότε από την $0 < |x-1| < \delta$ συνεπάγεται αφ' ενός ότι $x > -1$ (οπότε ο x είναι στο πεδίο ορισμού της $y = \ln(x+1)$) και αφ' ετέρου ότι $2e^{-\varepsilon}-1 < x < 2e^{\varepsilon}-1$ και από αυτήν συνεπάγεται $|\ln(x+1) - \ln 2| < \varepsilon$.

4. Θεωρούμε αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ και θέλουμε να βρούμε κάποιον $\delta > 0$ έτσι ώστε, αν x είναι στο πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+1}{x+2}$ – δηλαδή αν $x \neq -2$ – και $0 < |x-1| < \delta$ να συνεπάγεται $|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$.

Πρώτη λύση (Σταλλόνε): Διερευνούμε την $|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ και, κατ' αρχάς, βλέπουμε ότι είναι ισοδύναμη με την $\frac{1-3\varepsilon}{3} < \frac{1}{x+2} < \frac{1+3\varepsilon}{3}$. Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του $\frac{1-3\varepsilon}{3}$.

Περίπτωση $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Τότε η $\frac{1-3\varepsilon}{3} < \frac{1}{x+2} < \frac{1+3\varepsilon}{3}$ είναι ισοδύναμη με την $\frac{3}{1+3\varepsilon} < x+2 < \frac{3}{1-3\varepsilon}$ κι αυτή με την $\frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon} < x < \frac{1+6\varepsilon}{1-3\varepsilon}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός -2 δεν ανήκει στο διάστημα $(\frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon}, \frac{1+6\varepsilon}{1-3\varepsilon})$ ενώ ο αριθμός 1 ανήκει σ' αυτό το διάστημα. Επομένως, επιλέγουμε έναν (οποιονδήποτε) $\delta > 0$ το πολύ τόσο όση είναι η απόσταση του 1 από το κοντυνότερο προς αυτόν άκρο του διαστήματος $(\frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon}, \frac{1+6\varepsilon}{1-3\varepsilon})$. Δηλαδή, επιλέγουμε

$$0 < \delta \leq \min\Big\{1 - \frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon}, \frac{1+6\varepsilon}{1-3\varepsilon} - 1\Big\} = \min\Big\{\frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}, \frac{9\varepsilon}{1-3\varepsilon}\Big\} = \frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}.$$

Τότε, αν $0 < |x-1| < \delta$ συνεπάγεται αφ' ενός ότι $x \neq -2$ (οπότε ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+1}{x+2}$) και αφ' ετέρου ότι $\frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon} < x < \frac{1+6\varepsilon}{1-3\varepsilon}$ και από αυτήν συνεπάγεται ότι $|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$.

Περίπτωση $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Τότε η $\frac{1-3\varepsilon}{3} < \frac{1}{x+2} < \frac{1+3\varepsilon}{3}$ είναι ισοδύναμη με την $0 < \frac{1}{x+2} < \frac{2}{3}$ κι αυτή με την $x+2 > \frac{3}{2}$ κι αυτή με την $x > -\frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός -2 δεν ανήκει στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ ενώ ο 1 ανήκει στο διάστημα αυτό. Επομένως, επιλέγουμε έναν (οποιονδήποτε) $\delta > 0$ το πολύ ίσο με την απόσταση του 1 από το άκρο $-\frac{1}{2}$ του διαστήματος, δηλαδή

$$0 < \delta \leq 1 - \Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{2}.$$

Τότε, αν $0 < |x-1| < \delta$ συνεπάγεται αφ' ενός ότι $x \neq -2$ (οπότε ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+1}{x+2}$) και αφ' ετέρου ότι $x > -\frac{1}{2}$ και από αυτήν συνεπάγεται ότι $|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ (με $\varepsilon = \frac{1}{3}$).

Περίπτωση $\varepsilon > \frac{1}{3}$. Τότε η $\frac{1-3\varepsilon}{3} < \frac{1}{x+2} < \frac{1+3\varepsilon}{3}$ είναι ισοδύναμη με είτε $(0 <)\frac{3}{1+3\varepsilon} < x+2$ είτε $x+2 < \frac{3}{1-3\varepsilon}(< 0)$, δηλαδή ισοδύναμη με είτε $x > \frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon}$ είτε $x < \frac{1+6\varepsilon}{1-3\varepsilon}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα $(\frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon}, +\infty)$, οπότε επικεντρωνόμαστε σ' αυτό το διάστημα, και, επίσης, παρατηρούμε ότι ο αριθμός -2 δεν ανήκει σ' αυτό το διάστημα. Επομένως, επιλέγουμε έναν (οποιονδήποτε) $\delta > 0$ το πολύ ίσο με την απόσταση του 1 από το άκρο $\frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon}$ αυτού του διαστήματος, δηλαδή

$$0 < \delta \leq 1 - \frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon} = \frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}\,.$$

Τότε, αν $0 < |x-1| < \delta$ συνεπάγεται αφ' ενός ότι $x \neq -2$ (οπότε ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+1}{x+2}$) και αφ' ετέρου ότι $x > \frac{1-6\varepsilon}{1+3\varepsilon}$ και από αυτήν συνεπάγεται $|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$.

Ανακεφαλαιώνουμε: Επιλέγουμε κάποιον (οποιονδήποτε) δ ώστε

$$0 < \delta \leq \begin{cases} \frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}\,, & \text{αν } 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}, \\ \frac{3}{2}\,, & \text{αν } \varepsilon = \frac{1}{3}, \\ \frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}\,, & \text{αν } \varepsilon > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση επιλέγουμε

$$0 < \delta \leq \frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}\,.$$

Τότε από την $0 < |x-1| < \delta$ συνεπάγεται αφ' ενός ότι $x \neq -2$ (οπότε ο x είναι στο πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+1}{x+2}$) και αφ' ετέρου ότι $|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$.

Δεύτερη λύση (Οδυσσέας): Θέλοντας να αποφύγουμε το «κακό» σημείο -2 στο οποίο ο λόγος $\frac{x+1}{x+2}$ απειρίζεται, αποφασίζουμε να επιλέξουμε κάποιον $\delta > 0$ ο οποίος θα είναι μικρότερος από την απόσταση του αριθμού 1 από το -2, δηλαδή $\delta < 3$. Για παράδειγμα, αποφασίζουμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ έτσι ώστε $\delta \leq 2$.

Η σχέση $|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$ είναι ισοδύναμη με την $\frac{|x-1|}{|x+2|} < 3\varepsilon$. Τώρα σκεφτόμαστε ότι οι x που ικανοποιούν την $0 < |x-1| < \delta$ ικανοποιούν και την $|x-1| < 2$ (αφού $\delta \leq 2$) και, επομένως, και την $-1 < x < 3$ και, επομένως, και την $1 < x+2$ και, επομένως, και την $\frac{|x-1|}{|x+2|} < |x-1|$. Σκεφτόμαστε, επίσης, ότι (λόγω της τελευταίας ανισότητας) από την $|x-1| < 3\varepsilon$ συνεπάγεται η $\frac{|x-1|}{|x+2|} < 3\varepsilon$. Επομένως, αν βρούμε κάποιον $\delta \leq 2$ έτσι ώστε από την $0 < |x-1| < \delta$ να συνεπάγεται η $|x-1| < 3\varepsilon$, τότε (με τον ίδιο δ) από την $0 < |x-1| < \delta$ θα συνεπάγεται και η $\frac{|x-1|}{|x+2|} < 3\varepsilon$.

Όμως, για να συνεπάγεται η $|x-1| < 3\varepsilon$ από την $0 < |x-1| < \delta$, είναι φανερό ότι αρκεί να επιλέξουμε κάποιον (οποιονδήποτε) δ ώστε $0 < \delta \leq 3\varepsilon$. Επειδή θέλουμε να είναι και $\delta \leq 2$, τελικά επιλέγουμε

$$0 < \delta \leq \min\{3\varepsilon, 2\} = \begin{cases} 3, & \text{αν } \varepsilon \geq \frac{2}{3}, \\ 3\varepsilon, & \text{αν } 0 < \varepsilon < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ανακεφαλαιώνουμε: Επιλέγουμε κάποιον (οποιονδήποτε) δ ώστε

$$0 < \delta \leq \min\{3\varepsilon, 2\}.$$

Τότε από την $0 < |x-1| < \delta$ συνεπάγεται αφ' ενός ότι $|x-1| < 2$ (αφού $\delta \leq 2$) οπότε $x > -1$ (οπότε $x \neq -2$, δηλαδή ο x είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης) οπότε $x+2>1$ και αφ' ετέρου ότι $|x-1|<3\varepsilon$ (αφού $\delta\leq 3\varepsilon$) και, επομένως, ότι $\frac{|x-1|}{|x+2|}<|x-1|<3\varepsilon$ και, επομένως, ότι $|\frac{x+1}{x+2}-\frac{2}{3}|<\varepsilon$.

Άσκηση 2: *Υπολογίστε με τον ορισμό τα πλευρικά όρια στο 1 των παρακάτω συναρτήσεων και εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια καθώς $x\to 1$.*

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{αν } x>1,\\ \frac{x}{x-1}, & \text{αν } x<1.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{αν } x>1,\\ 1-2x, & \text{αν } x<1.\end{cases}$$

Λύση: 1. Αν το x πλησιάζει το 1 από δεξιά, καταλαβαίνουμε «διαισθητικά» ότι η παράσταση $f(x)=2x-1$ πλησιάζει το 1. Θα αποδείξουμε, επομένως, ότι $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$, δηλαδή ότι $\lim_{x\to 1+}(2x-1)=1$. Γι αυτό θεωρούμε αυθαίρετο $\varepsilon>0$ και θα βρούμε κατάλληλο $\delta>0$ ώστε, αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και είναι $0<x-1<\delta$ να συνεπάγεται $|(2x-1)-1|<\varepsilon$. Επειδή η σχέση $0<x-1<\delta$ αποκλείει από μόνη της να ισχύει $x=1$ (δηλαδή το να είναι το x έξω από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης), θέλουμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε από την $0<x-1<\delta$ να συνεπάγεται $|(2x-1)-1|<\varepsilon$. Τώρα, η $|(2x-1)-1|<\varepsilon$ είναι ισοδύναμη με την $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Άρα επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{\varepsilon}{2}$ και τότε: από την $0<x-1<\delta$ συνεπάγεται $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ και από αυτήν συνεπάγεται $|(2x-1)-1|<\varepsilon$.

Αν το x πλησιάζει το 1 από αριστερά, καταλαβαίνουμε ότι η παράσταση $f(x)=\frac{x}{x-1}$ τείνει στο $-\infty$, αφού ο αριθμητής είναι περίπου 1 και ο παρονομαστής είναι πολύ μικρός και αρνητικός. Άρα, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 1-}f(x)=-\infty$, δηλαδή ότι $\lim_{x\to 1-}\frac{x}{x-1}=-\infty$. Γι αυτό θεωρούμε αυθαίρετο $M>0$ και θα βρούμε κατάλληλο $\delta>0$ ώστε, αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και είναι $-\delta<x-1<0$ να συνεπάγεται $\frac{x}{x-1}<-M$. Επειδή, και πάλι, η σχέση $-\delta<x-1<0$ αποκλείει από μόνη της να ισχύει $x=1$, θέλουμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε από την $-\delta<x-1<0$ να συνεπάγεται $\frac{x}{x-1}<-M$. Τώρα, η $\frac{x}{x-1}<-M$ είναι ισοδύναμη (αφού $x<1$) με την $x>\frac{M}{M+1}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα $(\frac{M}{M+1},+\infty)$ και ότι θέλουμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε το διάστημα $(1-\delta,1)$ να περιέχεται στο διάστημα $(\frac{M}{M+1},+\infty)$. Άρα επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq 1-\frac{M}{M+1}$ και τότε: από την $-\delta<x-1<0$ συνεπάγεται $x>\frac{M}{M+1}$ και από αυτήν συνεπάγεται $\frac{x}{x-1}<-M$.

Επειδή τα δυο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το $\lim_{x\to 1}f(x)$ δεν υπάρχει.

2. Αν το x πλησιάζει το 1 από δεξιά, καταλαβαίνουμε ότι η παράσταση $g(x)=2x+3$ πλησιάζει το 5. Θα αποδείξουμε, επομένως, ότι $\lim_{x\to 1+}g(x)=5$, δηλαδή ότι $\lim_{x\to 1+}(2x+3)=5$. Γι αυτό θεωρούμε αυθαίρετο $\varepsilon>0$ και θα βρούμε κατάλληλο $\delta>0$ ώστε, αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και είναι $0<x-1<\delta$ να συνεπάγεται $|(2x+3)-5|<\varepsilon$. Επειδή η σχέση $0<x-1<\delta$ αποκλείει από μόνη της να ισχύει $x=1$ (δηλαδή το να είναι το x έξω από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης), θέλουμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε από την $0<x-1<\delta$ να συνεπάγεται $|(2x+3)-5|<\varepsilon$. Τώρα, η $|(2x+3)-5|<\varepsilon$ είναι ισοδύναμη με την $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Άρα επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{\varepsilon}{2}$ και τότε: από την $0<x-1<\delta$ συνεπάγεται $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ και από αυτήν συνεπάγεται $|(2x+3)-5|<\varepsilon$.

Αν το x πλησιάζει το 1 από αριστερά, καταλαβαίνουμε ότι η παράσταση $g(x) = 1-2x$ πλησιάζει το -1. Θα αποδείξουμε, επομένως, ότι $\lim_{x\to1-} g(x) = -1$, δηλαδή ότι $\lim_{x\to1-}(1-2x) = -1$. Θεωρούμε, επομένως, αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ και θα βρούμε κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε, αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και είναι $-\delta < x-1 < 0$ να συνεπάγεται $|(1-2x)-(-1)| < \varepsilon$. Επειδή η σχέση $-\delta < x-1 < 0$ αποκλείει από μόνη της να ισχύει $x = 1$, θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε από την $-\delta < x-1 < 0$ να συνεπάγεται $|(1-2x)-(-1)| < \varepsilon$. Τώρα, η $|(1-2x)-(-1)| < \varepsilon$ είναι ισοδύναμη με την $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και τότε: από την $-\delta < x-1 < 0$ συνεπάγεται $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ και από αυτήν συνεπάγεται $|(1-2x)-(-1)| < \varepsilon$.

Επειδή τα δυο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το $\lim_{x\to1} g(x)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 3: *Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες με το ότι το όριο τής $f(x)$ καθώς το x τείνει στο ξ είναι ℓ; Αιτιολογήστε πλήρως τίς απαντήσεις σας.*

1. Για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$.

2. Για κάθε $\varepsilon > 1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$.

3. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$.

Λύση: 1. Πρέπει να δούμε αν είναι ισοδύναμη η πρόταση

«για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο

πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$»

με το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, δηλαδή με την πρόταση

«για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο

πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$».

Ας υποθέσουμε ότι η δεύτερη πρόταση είναι αληθής. Δηλαδή ότι «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει .....». Αν θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο ε που ικανοποιεί την $0 < \varepsilon < 1$, τότε αυτός ο ε προφανώς ικανοποιεί και την $\varepsilon > 0$. Επομένως, για αυτόν τον (αυθαίρετο) ε θα υπάρχει ...... Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι «για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει .....». Άρα, αν η δεύτερη πρόταση είναι αληθής τότε και η πρώτη πρόταση είναι αληθής.

Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη πρόταση είναι αληθής. Δηλαδή ότι «για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει .....». Αν θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο ε που ικανοποιεί την $\varepsilon > 0$, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Ισχύει $0 < \varepsilon < 1$. Τότε για αυτόν τον ε θα υπάρχει ....

Δεύτερη περίπτωση: Ισχύει $\varepsilon \geq 1$. Σ' αυτήν την περίπτωση παίρνουμε έναν δεύτερο ε' ο οποίος να ικανοποιεί την $0 < \varepsilon' < 1$. Για παράδειγμα, παίρνουμε τον $\varepsilon' = \frac{1}{2}$. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x

στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x - \xi| < \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \frac{1}{2}$. Επειδή, όμως, $\frac{1}{2} < 1 \leq \varepsilon$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x - \xi| < \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Άρα και γι αυτόν τον ε θα υπάρχει ..... .

Συνδυάζοντας τις δυο περιπτώσεις, καταλήγουμε στο ότι «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει .....». Άρα, αν η πρώτη πρόταση είναι αληθής τότε και η δεύτερη πρόταση είναι αληθής.

Άρα οι δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

2. Πρέπει να δούμε αν είναι ισοδύναμη η πρόταση

«για κάθε $\varepsilon > 1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο

πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x - \xi| < \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$»

με το $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$, δηλαδή με την πρόταση

«για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο

πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x - \xi| < \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$».

Ας υποθέσουμε ότι η δεύτερη πρόταση είναι αληθής. Δηλαδή ότι «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει .....». Αν θεωρήσουμε έναν αυθαίρετο ε που ικανοποιεί την $\varepsilon > 1$, τότε αυτός ο ε προφανώς ικανοποιεί και την $\varepsilon > 0$. Επομένως, για αυτόν τον (αυθαίρετο) ε θα υπάρχει ..... . Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι «για κάθε $\varepsilon > 1$ υπάρχει .....». Άρα, αν η δεύτερη πρόταση είναι αληθής τότε και η πρώτη πρόταση είναι αληθής.

Αν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι «αν η πρώτη πρόταση είναι αληθής τότε και η δεύτερη πρόταση είναι αληθής» δεν θα τα καταφέρουμε. Ο πιο σίγουρος τρόπος να δούμε ότι η πρώτη πρόταση δεν συνεπάγεται την δεύτερη πρόταση είναι με ένα «αντιπαράδειγμα».

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0, \\ -1, & \text{αν } x < 0, \end{cases}$$

τον αριθμό $\xi = 0$ και τον αριθμό $\ell = 0$.

Θα δείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή η πρώτη πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, θεωρούμε έναν αυθαίρετο $\varepsilon > 1$. Παρατηρούμε ότι η σχέση $|f(x) - 0| < \varepsilon$ ισχύει *για κάθε* $x \neq 0$, αφού είναι $|f(x) - 0| = |\pm 1 - 0| = 1 < \varepsilon$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ – πάρτε για παράδειγμα τον $\delta = 2$ – τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x - 0| < \delta = 2$ (δηλαδή, αν $0 < |x| < 2$) τότε $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Από την άλλη μεριά, η δεύτερη πρόταση δεν είναι αληθής. Πράγματι, το $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ δεν είναι σωστό, αφού (όπως έχουμε δει) το $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

3. Πρέπει να δούμε αν είναι ισοδύναμη η πρόταση

«για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$»

με το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, δηλαδή με την πρόταση

«για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο

πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$».

Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη πρόταση είναι αληθής. Δηλαδή ότι «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε .....». Επειδή, όμως, κάθε δ που ικανοποιεί την $0 < \delta < 1$ ικανοποιεί προφανώς και την $\delta > 0$, συμπεραίνουμε αμέσως ότι «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε .....». Άρα, αν η πρώτη πρόταση είναι αληθής τότε και η δεύτερη πρόταση είναι αληθής.

Ας υποθέσουμε ότι η δεύτερη πρόταση είναι αληθής. Δηλαδή ότι «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε .....». Ας θεωρήσουμε τώρα έναν αυθαίρετο $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε «για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta$ τότε $|f(x)-\ell| < \varepsilon$». Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Ισχύει $0 < \delta < 1$. Τότε γι αυτόν τον $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε ..... .
Δεύτερη περίπτωση: Ισχύει $\delta \geq 1$. Σ' αυτήν την περίπτωση παίρνουμε ένα δεύτερο δ' ο οποίος να ικανοποιεί την $0 < \delta' < 1$. Για παράδειγμα, παίρνουμε το $\delta' = \frac{1}{2}$. Τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού τής f, αν $0 < |x-\xi| < \delta' = \frac{1}{2}$ τότε $0 < |x-\xi| < \delta$ (αφού $\frac{1}{2} < 1 \leq \delta$) οπότε (σύμφωνα με αυτό που ισχύει) $|f(x)-\ell| < \varepsilon$. Άρα, γι αυτόν τον $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta' = \frac{1}{2} < 1$ τέτοιο ώστε ..... .

Συνδυάζοντας τις δυο περιπτώσεις, καταλήγουμε στο ότι «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ (το αρχικό δ στην πρώτη περίπτωση και το $\delta' = \frac{1}{2}$ στην δεύτερη περίπτωση) τέτοιο ώστε .....». Άρα, αν η δεύτερη πρόταση είναι αληθής τότε και η πρώτη πρόταση είναι αληθής.

Άρα οι δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες.