ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 4.

Άσκηση 1: *Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια. Αν χρειάζεται, υπολογίστε τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-x^2-x+1}\,,$$

$$\lim_{x\to -\infty}\Big(\frac{1-2x+x^3}{-2x^2+x+1}\Big)^5,\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\frac{7}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^2+3x^{\frac{15}{8}}}\,,\quad \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^\alpha-1}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x^2-x}\,,\quad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{(x-\pi)^2}\,,\quad \lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x}+3)^5}{(\sqrt{x}+3)^4+(\sqrt{x}+3)^8+2}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(2x)}{(\log(3x))^2}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-1}{2e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-2}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x}\Big],\quad \lim_{x\to +\infty}\Big[\frac{1}{x}\Big],\quad \lim_{x\to -\infty}\Big[\frac{1}{x}\Big],\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{[x^4]}{x^3+x^2}\,.$$

Λύση: 1. Παρατηρούμε ότι το όριο τού αριθμητή είναι 3 ενώ το όριο τού παρονομαστή είναι 0. Επομένως εξετάζουμε το πρόσημο τού παρονομαστή. Αν είναι θετικός κοντά στο 1 τότε το όριο τού κλάσματος είναι $+\infty$. Αν είναι αρνητικός τότε το όριο τού κλάσματος είναι $-\infty$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x^4-2x^3+2x^2-2x+1 &= x^4-2x^3+x^2+x^2-2x+1\\ &= x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)\\ &= (x^2-2x+1)(x^2+1)\\ &= (x-1)^2(x^2+1)>0, \end{aligned}$$

για κάθε $x\neq 1$. Άρα το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$.

2. Το όριο τού αριθμητή και τού παρονομαστή είναι μηδέν. Για να άρουμε την απροσδιοριστία παραγοντοποιούμε.

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-x^2-x+1} &= \frac{x(x^2-1)+2(x^2-1)}{x^2(x-1)-(x-1)} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{(x^2-1)(x-1)}\\ &= \frac{x+2}{x-1}, \end{aligned}$$

για $x\neq\pm1$. Εξετάζουμε τα πλευρικά όρια στην παραπάνω ποσότητα. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x+2}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty.$$

Αφού είναι διαφορετικά, το αρχικό όριο δεν υπάρχει.

3. Όπως στην περίπτωση ακολουθίας, βγάζουμε κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο σε αριθμητή και παρονομαστή.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-2x+x^3}{-2x^2+x+1}\right)^5 &= \left(x\cdot\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^5 \to \left((-\infty)\cdot\frac{1-0+0}{-2+0+0}\right)^5\\ &= \left(\frac{-\infty}{-2}\right)^5 = +\infty.\end{aligned}$$

4. Όπως πριν.

$$\begin{aligned}\frac{x^{\frac{7}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^2+3x^{\frac{15}{8}}} &= \frac{x^{\frac{7}{4}}\left(1-\frac{1}{x^{\frac{17}{12}}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\right)}\\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1-\frac{1}{x^{\frac{17}{12}}}}{1+\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}} \to 0\cdot\frac{1-0}{1+0} = 0.\end{aligned}$$

5. Όπως στην περίπτωση ακολουθίας, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε την ποσότητα μέσα στην παρένθεση με τη συζυγή παράσταση.

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \to \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

6. Παρατηρούμε ότι το όριο τού παρονομαστή είναι 0. Επίσης, για $\alpha > 0$, αν $x > 1$, τότε ο παρονομαστής είναι θετικός ενώ, αν $x < 1$, είναι αρνητικός. Έτσι

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x^\alpha-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x^\alpha-1} = +\infty.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το όριο δεν υπάρχει. Τελείως ανάλογα, για $\alpha < 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x^\alpha-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x^\alpha-1} = -\infty.$$

Επομένως το όριο δεν υπάρχει.

7. Όπως πριν. Το όριο τού παρονομαστή είναι 0. Για θετικά x είναι θετικός, για αρνητικά x είναι αρνητικός. Άρα

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{e^x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^x-1} = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε ότι το όριο δεν υπάρχει.

8. Για x αρκετά κοντά στο 0, για παράδειγμα, στο σύνολο $(-1/2,0)\cup(0,1/2)$, έχουμε

$$\frac{\tan(3x)}{x^2-x}=\frac{\sin(3x)}{x}\cdot\frac{1}{(x-1)\cos(3x)}.$$

Στο πρώτο κλάσμα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=3x$. Τότε $y\to 0$ καθώς $x\to 0$. Έτσι

$$\frac{\sin(3x)}{x}=3\cdot\frac{\sin y}{y}\to 3\cdot 1=3.$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)\cos(3x)}=\frac{1}{(0-1)\cos 0}=-1.$$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι $3\cdot(-1)=-3$.

9. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=x-\pi$. Τότε $y\to 0$ καθώς $x\to\pi$. Επίσης

$$\frac{\sin x}{(x-\pi)^2}=\frac{\sin(\pi+y)}{y^2}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{\sin y}{y}.$$

Αλλά

$$\lim_{y\to 0-}\left(-\frac{1}{y}\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=(-(-\infty)\cdot 1)=+\infty$$

και

$$\lim_{y\to 0+}\left(-\frac{1}{y}\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=(-(+\infty)\cdot 1)=-\infty.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το όριο δεν υπάρχει.

10. Παρατηρούμε ότι για $x>0$ έχουμε

$$-\sqrt{x}\le\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\le\sqrt{x}.$$

Αλλά $\sqrt{x}\to 0$ καθώς $x\to 0+$. Άρα, από παρεμβολή, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με μηδέν.

11. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}+3$. Τότε $y\to 3+$ καθώς $x\to 0+$. Έτσι

$$\frac{(\sqrt{x}+3)^5}{(\sqrt{x}+3)^4+(\sqrt{x}+3)^8+2}=\frac{y^5}{y^4+y^8+2}\to\frac{3^5}{3^4+3^8+2}=\frac{243}{6644},$$

καθώς $y\to 3+$. Η λύση αυτή δίνεται σαν παράδειγμα αλλαγής μεταβλητής. Το όριο μπορεί φυσικά να υπολογιστεί απ΄ ευθείας:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(\sqrt{x}+3)^5}{(\sqrt{x}+3)^4+(\sqrt{x}+3)^8+2}=\frac{(\sqrt{0}+3)^5}{(\sqrt{0}+3)^4+(\sqrt{0}+3)^8+2}=\frac{243}{6644}.$$

12. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\log(2x)}{(\log(3x))^2}=\frac{\log 2+\log x}{(\log 3+\log x)^2}.$$

Έτσι, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \log x$. Τότε $y \to -\infty$ καθώς $x \to 0+$, και

$$\frac{\log 2 + \log x}{(\log 3 + \log x)^2} = \frac{\log 2 + y}{(\log 3 + y)^2}$$
$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{\frac{\log 2}{y} + 1}{\left(\frac{\log 3}{y} + 1\right)^2} \to 0 \cdot \frac{0+1}{(0+1)^2} = 0,$$

καθώς $y \to -\infty$.

13. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = e^{\frac{1}{x}}$. Τότε

$$\frac{e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - 1}{2e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - 2} = \frac{y^2 - y - 1}{2y^2 - y - 2}.$$

Εξετάζουμε τα πλευρικά όρια καθώς $x \to 0+$ και $x \to 0-$. Παρατηρούμε ότι αν $x \to 0+$, τότε $\frac{1}{x} \to +\infty$, άρα $y = e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$. Επομένως

$$\frac{y^2 - y - 1}{2y^2 - y - 2} = \frac{1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}}{2 - \frac{1}{y} - \frac{2}{y^2}} \to \frac{1 - 0 - 0}{2 - 0 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Τώρα, αν $x \to 0-$, τότε $\frac{1}{x} \to -\infty$, άρα $y = e^{\frac{1}{x}} \to 0$. Συνεπώς

$$\frac{y^2 - y - 1}{2y^2 - y - 2} \to \frac{0 - 0 - 1}{0 - 0 - 2} = \frac{1}{2}.$$

Δείξαμε, έτσι, ότι

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - 1}{2e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - 2} = \lim_{x \to 0-} \frac{e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - 1}{2e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - 2} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως το όριο υπάρχει και είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

14. Στο ερώτημα αυτό και στα επόμενα, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$[a] \leq a < [a] + 1,$$

η οποία ισχύει για κάθε a. Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x}\right]$, αν υπάρχει, εξετάζουμε τα πλευρικά όρια. Για $x > 0$, χρησιμοποιούμε τη δεξιά από τις παραπάνω ανισότητες, δηλαδή

$$\frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1 \quad \text{άρα} \quad \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right],$$

και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = +\infty.$$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0+}\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty.$$

Για $x < 0$ χρησιμοποιούμε την άλλη ανισότητα, δηλαδή

$$\left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}\,,$$

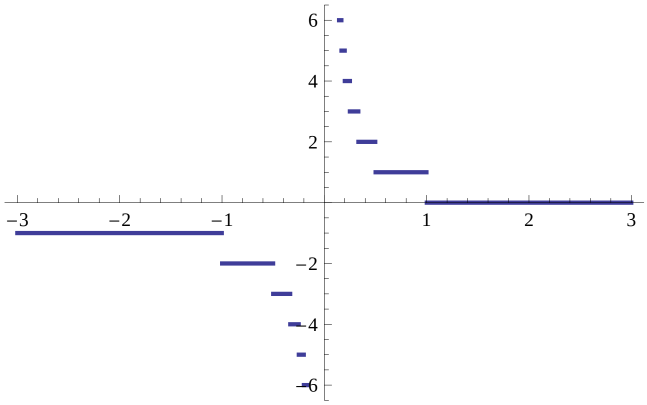
και σε αναλογία με την προηγούμενη περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Έτσι

$$\lim_{x\to 0-}\left[\frac{1}{x}\right] = -\infty.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το όριο δεν υπάρχει. Η γραφική παράσταση τής συνάρτησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Είναι χρήσιμη και στο επόμενο ερώτημα.



15. Για $x \ge 0$ έχουμε

$$0 \le \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}\,.$$

Αλλά $\frac{1}{x} \to 0$ καθώς $x \to +\infty$ και, επομένως, από παρεμβολή, το ζητούμενο όριο είναι ίσο με μηδέν. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο επιχείρημα. Αν $x > 1$, τότε το $\frac{1}{x}$ είναι ένας θετικός αριθμός μικρότερος από 1. Τώρα, το ακέραιο μέρος ενός αριθμού είναι ο **μεγαλύτερος** ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό. Έτσι στην προκειμένη περίπτωση, αφού $0 < \frac{1}{x} < 1$, έχουμε ότι $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$. Δείξαμε δηλαδή ότι στο διάστημα $(1, +\infty)$ η συνάρτηση $\left[\frac{1}{x}\right]$ είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν, άρα και το όριό της καθώς $x \to +\infty$ είναι ίσο με μηδέν. Με την ορολογία που έχουμε εισαγάγει στο μάθημα: «Η $\left[\frac{1}{x}\right]$ είναι ίση με μηδέν κοντά στο $+\infty$».

16. Τελείως ανάλογα με το προηγούμενο ερώτημα. Αν $x < -1$, τότε $-1 < \frac{1}{x} < 0$, άρα $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$. Συνεπώς το ζητούμενο όριο είναι ίσο με -1.

17. Έχουμε

$$\frac{\left[x^4\right]}{x^3 + x^2} > \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2}.$$

Αλλά

$$\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2} = x \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^4}}{1 + \frac{1}{x}} \to (+\infty) \cdot \frac{1 - 0}{1 + 0} = +\infty.$$

Άρα

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left[x^4\right]}{x^3 + x^2} = +\infty.$$

Άσκηση 2: *Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.*

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, *αν* $\frac{x^2}{x+1} \leq f(x)$ *για κάθε* $x > 1$.

2. $\lim_{x \to 0} f(x)$, *αν* $\frac{x}{f(x)} > 1$ *για κάθε* x *στο* $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

3. $\lim_{x \to 0} x[\frac{1}{x}]$, $\lim_{x \to +\infty} x[\frac{1}{x}]$, $\lim_{x \to -\infty} x[\frac{1}{x}]$.

Λύση: 1. Έχουμε

$$\frac{x^2}{x + 1} = x \cdot \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right) \to (+\infty) \cdot (1 - 0) = +\infty.$$

Άρα $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν η ανισότητα ίσχυε για κάθε $x > c$, $x \neq -1$, όπου c οποιοσδήποτε δεδομένος αριθμός.

2. Εξετάζουμε τα πλευρικά όρια. Αν $0 < x < 1$, η ανισότητα $\frac{x}{f(x)} > 1$ συνεπάγεται ότι $0 < f(x) < x$ (αφού το κλάσμα είναι θετικό και ο αριθμητής θετικός, πρέπει και ο παρονομαστής να είναι θετικός, έτσι αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη τής ανισότητας με $f(x)$, η φορά διατηρείται). Άρα από παρεμβολή, έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0.$$

Αν $-1 < x < 0$, τότε από την $\frac{x}{f(x)} > 1$, παίρνουμε ότι $x < f(x) < 0$ (τώρα ο παρονομαστής είναι αρνητικός, επομένως πολλαπλασιάζοντας με $f(x)$ η φορά τής ανισότητας αντιστρέφεται). Άρα, πάλι από παρεμβολή,

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα με μηδέν, συμπεραίνουμε ότι το όριο υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν.

3. (i) Εξετάζουμε τα πλευρικά όρια. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Αν $x > 0$, τότε πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα με x και παίρνουμε

$$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1,$$

άρα από παρεμβολή

$$\lim_{x\to 0+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

Αν $x < 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας με x παίρνουμε

$$1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x.$$

Πάλι από παρεμβολή έχουμε

$$\lim_{x\to 0-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα με 1, συμπεραίνουμε ότι το όριο είναι ίσο με 1.

(ii) Όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, αν $x > 1$, τότε $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$, άρα στο διάστημα $(1, +\infty)$, έχουμε $x\left[\frac{1}{x}\right] = 0$. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι $\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = 0$.

(iii) Όπως πριν. Στο διάστημα $(-\infty, -1)$ έχουμε $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$, άρα

$$\lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty.$$

Άσκηση 3: *Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ακολουθίες, αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια.*

$$\lim_{x\to+\infty}(x - [x]), \quad \lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}, \quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

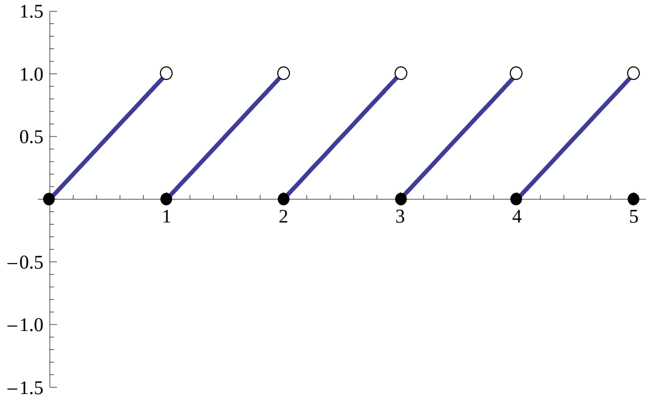
Λύση: 1. Θέτουμε $x_n = n$ και $y_n = n + \frac{1}{2}$. Τότε $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$. Αλλά

$$x_n - [x_n] = n - [n] = n - n = 0 \to 0,$$

και

$$y_n - [y_n] = n + \frac{1}{2} - \left[n + \frac{1}{2}\right] = n + \frac{1}{2} - n = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

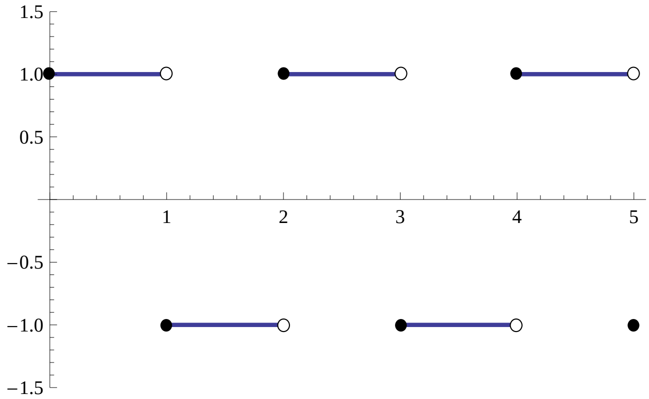
Έτσι η συνάρτηση $x-[x]$ στέλνει δυο ακολουθίες που αποκλίνουν στο $+\infty$ σε δυο ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Επομένως το $\lim_{x\to+\infty}(x-[x])$ δεν υπάρχει. Για να δείτε γιατί $\left[n + \frac{1}{2}\right] = n$, παρατηρήστε ότι ο αριθμός $n + \frac{1}{2}$ πέφτει ανάμεσα στους διαδοχικούς φυσικούς n και $n + 1$, άρα το ακέραιο μέρος του είναι n. Δείτε και τη γραφική παράσταση:



2. Επιλέγουμε $x_n = 2n$ και $y_n = 2n+1$. Τότε $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$. Αλλά

$$(-1)^{x_n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1, \quad (-1)^{y_n} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1.$$

Ιδού η γραφική παράσταση:



3. Για τις θετικές ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}},$$

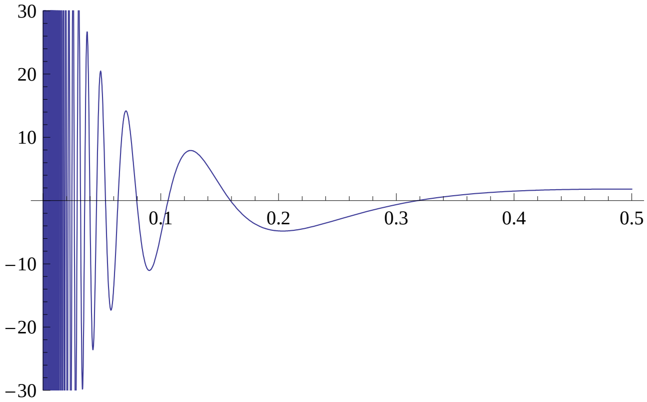
έχουμε ότι $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Όμως

$$\frac{1}{x_n} \sin \frac{1}{x_n} = \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$$

και

$$\frac{1}{y_n} \sin \frac{1}{y_n} = \left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = -\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) \to -\infty.$$

Παρατηρήστε τη γραφική παράσταση. Καθώς το x πλησιάζει το 0 η συνάρτηση ταλαντώνεται με ολοένα μεγαλύτερη συχνότητα και πλάτος. Η x_n αντιστοιχίζεται στις θετικές κορυφές, ενώ η y_n στις αρνητικές.


30
20
10
−10
−20
−30
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5