ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 6.

Άσκηση 1: *Δείξτε ότι η εξίσωση* $e^x = x + 2$ *έχει τουλάχιστον δυο λύσεις.*

Λύση: Θέτουμε $f(x) = e^x - x - 2$. Τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και παρατηρούμε ότι

$$f(-3) = \frac{1}{e^3} + 3 - 2 > 0, \quad f(0) = 1 - 2 = -1 < 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, η f μηδενίζεται σε κάποιο σημείο τού $(-3, 0)$. Ομοίως, αφού

$$f(3) = e^3 - 3 - 2 > 2^3 - 5 = 3 > 0, \quad f(0) < 0,$$

η f μηδενίζεται σε κάποιο σημείο τού $(0, 3)$.

Άσκηση 2: *Δείξτε ότι η εξίσωση*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$$

έχει ακριβώς μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$. Έχουμε

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = (+\infty) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = 1 + (-\infty) - 1 - \frac{1}{2} = -\infty.$$

Από τον ορισμό των πλευρικών ορίων, υπάρχουν a, b με $0 < a < b < 1$ έτσι ώστε $f(a) > 1000$ και $f(b) < -1000$. Δηλαδή, η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο διάστημα $(0, 1)$, επομένως, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, μηδενίζεται σε κάποιο σημείο τού $(0, 1)$. Εξετάζοντας τα πλευρικά όρια στα σημεία 1, 2 και 3, δείχνουμε με τελείως ανάλογο τρόπο ότι η f μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(1, 2)$ και $(2, 3)$. Παρατηρούμε τώρα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα τρία διαστήματα ως άθροισμα τεσσάρων συναρτήσεων οι οποίες είναι γνησίως φθίνουσες στα διαστήματα. Ιδιαιτέρως, η f είναι 1-1 σε καθένα από τα διαστήματα, άρα μηδενίζεται σε ακριβώς ένα σημείο των διαστημάτων.

Άσκηση 3: *Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.*

1. $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

2. $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$, $x \in \mathbf{R}$.

3. $h(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Λύση: 1. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty) + 0 = -\infty.$$

Όπως έχουμε αναφέρει στο μάθημα, το σύνολο τιμών μιας τέτοιας συνάρτησης είναι ολόκληρο το $\mathbf{R}$. Ας ξαναδούμε την απόδειξη. Έστω $y \in \mathbf{R}$ τυχόν. Θα δείξουμε ότι το y είναι τιμή τής f. Η υπόθεση για τα δυο όρια συνεπάγεται ότι υπάρχουν a και b με $a < 0 < b$ τέτοια ώστε $f(a) < y$ και $f(b) > y$. Δηλαδή, το y είναι ανάμεσα σε δυο τιμές τής f, άρα, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, είναι και το ίδιο τιμή τής f.

2. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{1+(+\infty)} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Επίσης, η g είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί η e^x είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, το σύνολο τιμών τής g είναι το ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$.

3. Υπολογίζουμε τα όρια στα άκρα τού πεδίου ορισμού.

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = 0 + (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = (+\infty) + 0 = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε ότι η h παίρνει ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[m, +\infty)$, όπου m η ελάχιστη τιμή της. Για να προσδιορίσουμε το m (χωρίς παραγώγους!), παρατηρούμε ότι $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, άρα $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ (αφού $x > 0$), δηλαδή $h(x) \geq 2$. Απ΄ την άλλη, $h(1) = 2$, άρα η ελάχιστη τιμή τής h είναι το 2. Έτσι, $h((0, +\infty)) = [2, +\infty)$.

Άσκηση 4: *Έστω* $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ *συνεχής, τέτοια ώστε* $(f(x))^2 + (\sin x)^2 = 1$ *για κάθε* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Δείξτε ότι είτε* $f(x) = \cos x$ *για κάθε* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *ή* $f(x) = -\cos x$ *για κάθε* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Τι γίνεται αν αντικαταστήσουμε το διάστημα* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *με το* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$*;*

Λύση: Από τη σχέση $(f(x))^2 + (\sin x)^2 = 1$ παίρνουμε ότι για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει

$$(*) \quad \text{είτε } f(x) = \sqrt{1 - (\sin x)^2} = \cos x, \text{ ή } f(x) = -\sqrt{1 - (\sin x)^2} = -\cos x.$$

Ιδιαιτέρως, η f δεν μηδενίζεται στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Έτσι, από το Θεώρημα Σταθερού Προσήμου, η f είτε είναι θετική στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ή είναι αρνητική. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι είτε $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ή $f(x) = -\cos x$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Πράγματι, αν αυτό δεν ήταν αλήθεια, τότε λόγω τής $(*)$, θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, έτσι ώστε $f(x_1) = \cos x_1 > 0$ και $f(x_2) = -\cos x_2 < 0$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο γιατί η f έχει σταθερό πρόσημο. Τέλος, παρατηρούμε ότι $f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) = 0$, άρα είτε $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ή $f(x) = -\cos x$

για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Με τελείως ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι είτε $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, ή $f(x) = -\cos x$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Επομένως, στην ένωση $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ έχουμε τέσσερα ενδεχόμενα:

$$f(x) = \cos x,$$

$$f(x) = -\cos x,$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases} = |\cos x|,$$

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \cos x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases} = -|\cos x|.$$

Άσκηση 5: *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $f(x) < 5$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $u < 5$ έτσι ώστε $f(x) < u$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Λύση: Από το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $[a, b]$, δηλαδή υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αλλά, από υπόθεση, $f(\xi) < 5$. Άρα, αν επιλέξουμε u με $f(\xi) < u < 5$, έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 6: *Έστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.*

Λύση: Θέτουμε $g(x) = f(x) - x$. Τότε, αφού $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε x, έχουμε $g(0) = f(0) \geq 0$ και $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = \xi$.

Άσκηση 7: *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ συνεχής. Σταθεροποιούμε $a, b > 0$ τέτοια ώστε $a + b = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = af(0) + bf(1)$.*

Λύση: Ο αριθμός $af(0) + bf(1)$ είναι ανάμεσα στους $f(0)$ και $f(1)$ διότι, αν θέσουμε $m = \min\{f(0), f(1)\}$ και $M = \max\{f(0), f(1)\}$, τότε έχουμε

$$m = am + bm \leq af(0) + bf(1) \leq aM + bM = M.$$

Δηλαδή, το $af(0)+bf(1)$ πέφτει ανάμεσα σε δυο τιμές τής f, άρα, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής είναι και το ίδιο τιμή τής f.