ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 7.

Άσκηση 1: *Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $x \leq f(x) \leq x + x^2$ για κάθε x. Δείξτε ότι η παράγωγος στο μηδέν υπάρχει και υπολογίστε την.*

Λύση: Από την $x \leq f(x) \leq x + x^2$ παίρνουμε ότι $f(0) = 0$. Έτσι, για $x > 0$, αν διαιρέσουμε την ανισότητα με x έχουμε

$$1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \leq 1 + x.$$

Επομένως, από κριτήριο παρεμβολής,

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Ομοίως,

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Άρα $f'(0) = 1$.

Άσκηση 2: *Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x \sin x + \cos x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες.*

Λύση: Θέτουμε $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$. Τότε $f(0) = -1 < 0$ και $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2 - 1 > 0$. Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, η f έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $(0, \pi)$ και τουλάχιστο μια ρίζα στο $(-\pi, 0)$. Αν τώρα είχε τρεις ρίζες $a < b < c$, τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, η f' θα είχε τουλάχιστο μια ρίζα στο (a, b) και τουλάχιστο μια ρίζα στο (b, c). Αλλά η $f'(x) = x(2 - \cos x)$ έχει μια μόνο ρίζα: το μηδέν.

Άσκηση 3: *Έστω $a, b > 0$. Υπολογίστε τα όρια*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^a}}{x^b}.$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $\ln x < x$, για $x > 0$. Έστω $0 < c < \frac{b}{a}$. Τότε για $x > 1$ έχουμε

$$0 < \frac{(\ln x)^a}{x^b} = \frac{1}{c^a} \cdot \frac{(\ln x^c)^a}{x^b} < \frac{1}{c^a} \cdot \frac{x^{ac}}{x^b} = \frac{1}{c^a} \cdot \frac{1}{x^{b-ac}}.$$

Αλλά $\frac{1}{x^{b-ac}} \to 0$ καθώς $x \to +\infty$ διότι $b - ac > 0$. Επομένως, από κριτήριο παρεμβολής,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε θετική δύναμη τού λογαρίθμου πάει στο άπειρο πιο αργά από οποιαδήποτε θετική δύναμη τού x.

Για να υπολογίσουμε το δεύτερο όριο, χρησιμοποιούμε το πρώτο. Θέτουμε $y = e^{x^a}$, για $x > 0$, και παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^a}}{x^b} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(\ln y)^{b/a}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{(\ln y)^{b/a}}{y}} = +\infty,$$

διότι ο παρονομαστής $\frac{(\ln y)^{b/a}}{y}$ τείνει στο μηδέν και είναι θετικός.

Άσκηση 4: *1. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f' = f$. Δείξτε ότι $f(x) = ce^x$ για κάποιο $c \in \mathbf{R}$.*

2. Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) $f'(0) = 1$.
(ii) $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε x, y.

Λύση: 1. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

Τότε

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0,$$

άρα $g(x) = c$ για κάποιο $c \in \mathbf{R}$, και το συμπέρασμα έπεται.

2. Προφανώς μια τέτοια συνάρτηση είναι η e^x. Θα δείξουμε ότι είναι η μοναδική. Σταθεροποιώντας το x και παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x+y) = f(x)f(y)$ ως προς y, παίρνουμε $f'(x+y) = f(x)f'(y)$ για κάθε x, y. Άρα για $y = 0$ έχουμε $f'(x) = f(x)f'(0) = f(x)$ για κάθε x. Επομένως, από το πρώτο υποερώτημα, $f(x) = ce^x$ για κάποια σταθερά c. Έτσι, $ce^2 = f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = c^2e^2$. Άρα $c = c^2$. Αυτό σημαίνει ότι είτε $c = 0$ ή $c = 1$. Η περίπτωση $c = 0$ απορρίπτεται γιατί τότε θα είχαμε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση, το οποίο αποκλείεται αφού $f'(0) \neq 0$. Συνεπώς $c = 1$, δηλαδή $f(x) = e^x$.

Άσκηση 5: *Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε $f' \geq 1$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0,x]$, δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.*

Λύση: Για κάθε $x > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0,x]$ και παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi_x) \geq 1.$$

Επομένως $f(x) \geq x + f(0)$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο παρεμβολής.

Άσκηση 6: *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ ($x \in \mathbf{R}$) και υποθέτουμε ότι $|f(x)| \leq |\sin x|$ για κάθε x. Υπολογίζοντας την* *παράγωγο τής f στο 0, δείξτε ότι $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.*

Λύση: Παρατηρούμε ότι $f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx$, άρα $f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$. Επίσης για $x \neq 0$ έχουμε

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right|.$$

Έτσι, παίρνοντας όρια στην προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n| = |f'(0)| = \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

Άσκηση 7: *Έστω $p > 1$.*

1. Δείξτε ότι $px^{p-1} < (x+1)^p - x^p < p(x+1)^{p-1}$ για κάθε $x \geq 0$.

2. Υπολογίστε το όριο τής ακολουθίας

$$\frac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n^p}.$$

Λύση: 1. Θέτουμε $f(t) = t^p$, $t \geq 0$, και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x, x+1]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$(x+1)^p - x^p = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f'(\xi_x) = p\xi_x^{p-1}.$$

Αλλά

$$x < \xi_x < x+1 \Rightarrow px^{p-1} < p\xi_x^{p-1} < p(x+1)^{p-1} \Rightarrow px^{p-1} < f'(\xi_x) < p(x+1)^{p-1}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

2. Εφαρμόζουμε την πρώτη ανισότητα τού πρώτου υποερωτήματος για $x = 1, 2, \ldots, n$ και, προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες που προκύπτουν, παίρνουμε

$$p\left(1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right) < (n+1)^p - 1.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη δεύτερη ανισότητα τού πρώτου υποερωτήματος για $x = 0, 1, \ldots, n-1$ και, προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$n^p < p\left(1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right).$$

Έτσι έχουμε

$$n^p < p\left(1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right) < (n+1)^p - 1,$$

άρα

$$\frac{1}{p} < \frac{1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n^p} < \frac{1}{p}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - \frac{1}{n^p}\right].$$

Συμπεραίνουμε από το κριτήριο παρεμβολής ότι η ακολουθία συγκλίνει στο $1/p$.