ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 8.

Άσκηση 1: *Έστω* $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *συνεχής, παραγωγίσιμη στο* $(0, +\infty)$ *τέτοια ώστε* $f(0) = 0$ *και η* f' *είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η συνάρτηση* $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ *είναι αύξουσα.*

Λύση: Έχουμε ότι

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, x]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \leq f'(x).$$

Άρα $xf'(x) - f(x) \geq 0$, επομένως $g'(x) \geq 0$, συνεπώς η g είναι αύξουσα.

Άσκηση 2: *Υπολογίστε τα όρια*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^a}\right)^{x^b}, \qquad \lim_{x\to 0+} \left(1 + \frac{1}{x^a}\right)^{x^b},$$

όπου $a, b > 0$.

Λύση: Στο πρώτο όριο έχουμε απροσδιοριστία $1^{+\infty}$. Στο δεύτερο έχουμε $(+\infty)^0$. Παρατηρούμε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{x^a}\right)^{x^b} = e^{x^b \ln(1+x^{-a})}.$$

Από τον κανόνα L'Hôpital έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(x^b \ln(1 + x^{-a})\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + x^{-a})}{x^{-b}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-ax^{-a-1}}{1+x^{-a}}}{-bx^{-b-1}} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{1 + x^a} = \begin{cases} 0, & \text{αν } b < a, \\ 1, & \text{αν } b = a, \\ +\infty, & \text{αν } b > a. \end{cases}\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^a}\right)^{x^b} = \begin{cases} 1, & \text{αν } b < a, \\ e, & \text{αν } b = a, \\ +\infty, & \text{αν } b > a. \end{cases}$$

Ομοίως
$$\lim_{x\to 0+}\left(x^b\ln(1+x^{-a})\right)=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{x^b}{1+x^a}=0.$$
Επομένως
$$\lim_{x\to 0+}\left(1+\frac{1}{x^a}\right)^{x^b}=1.$$
Άσκηση 3: *Έστω $a_1,a_2,\dots,a_n>0$. Δείξτε ότι*

1. $\lim_{p\to 0+}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

2. $\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$.

Λύση: 1. Όπως στην προηγούμενη άσκηση
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^p\right)}.$$
Αλλά από L'Hôpital
$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0+}\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n a_k^p\right)}{p}&=\lim_{p\to 0+}\frac{\sum_{k=1}^n a_k^p\ln a_k}{\sum_{k=1}^n a_k^p}=\frac{\sum_{k=1}^n \ln a_k}{n}\\&=\ln\left[(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\right].\end{aligned}$$
2. Θέτουμε $M=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. Τότε
$$M\le\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\le n^{\frac{1}{p}}M.$$
Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο παρεμβολής.

Άσκηση 4: *1. Δείξτε ότι* $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$ *για κάθε* $x>0$.

2. Αποδείξτε ότι
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
για κάθε $n\in\mathbf{N}$.

Λύση: 1.Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, και παίρνουμε ότι για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi\in\left(1,1+\frac{1}{x}\right)$ τέτοιο ώστε
$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{f\left(1+\frac{1}{x}\right)-f(1)}{1+\frac{1}{x}-1}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}.$$
2. Θέτουμε
$$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Τότε

$$g'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right].$$

Από το 1, η ποσότητα στις αγκύλες είναι θετική, άρα η g είναι γνήσια αύξουσα και το συμπέρασμα έπεται.

Άσκηση 5: *1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x\ln x$, $x > 0$, είναι κυρτή.*

2. Δείξτε ότι αν $x, y, a, b > 0$ τότε

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leq x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}.$$

Λύση: $1. f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, άρα η f' είναι αύξουσα, επομένως η f είναι κυρτή.

2. Αφού η f είναι κυρτή έχουμε

$$\begin{aligned}
(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} &= (a+b)\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{y}{b}\right)\ln\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{y}{b}\right) \\
&= (a+b)f\left(\frac{a}{a+b}\cdot\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{y}{b}\right) \\
&\leq (a+b)\left[\frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right)\right] \\
&= x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 6: *Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ κυρτή και κοίλη. Ποια είναι η μορφή τής f;*

Λύση: Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έστω $y = a_n x + b_n$ η εξίσωση τής ευθείας που περνάει από τα σημεία $(-n, f(-n))$ και $(n, f(n))$. f κυρτή και κοίλη σημαίνει ότι $f(x) = a_n x + b_n$ για κάθε $x \in [-n, n]$ και κάθε n. Άρα $a_n x + b_n = a_1 x + b_1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και κάθε n. Συνεπώς $a_n = a_1$ και $b_n = b_1$ για κάθε n. Επομένως $f(x) = a_1 x + b_1$ για κάθε x.