ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Λύσεις ασκήσεων φυλλαδίου 6.

Άσκηση 1: *Χρησιμοποιήστε διαμέριση* $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *του* $[a,b]$ *με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία και ενδιάμεσα σημεία* $\xi_k = x_{k-1}$ $(1 \le k \le n)$ *για να αποδείξετε ότι*

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

Λύση: Παίρνουμε $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ $(0 \le k \le n)$ και $\xi_k = x_{k-1}$ $(1 \le k \le n)$ και υπολογίζουμε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της $f(x) = e^x$:

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) &= \sum_{k=1}^n e^{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n e^{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}e^a\sum_{k=1}^n \big(e^{\frac{b-a}{n}}\big)^{k-1} = \frac{b-a}{n}e^a\frac{\big(e^{\frac{b-a}{n}}\big)^n - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \\ &= \frac{b-a}{n}e^a\frac{e^{b-a}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1} = (e^b - e^a)\frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}\,.\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = f'(0) = 1$. Θεωρούμε την ακολουθία (h_n) με $h_n = \frac{b-a}{n}$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{h_n}-1}{h_n} = 1$. Άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = e^b - e^a\,.$$

Επειδή πλάτος$(\Delta) = \frac{b-a}{n} \to 0$ όταν $n \to +\infty$ και επειδή η $f(x) = e^x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (ως συνεχής), συνεπάγεται

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = e^b - e^a\,.$$

Άσκηση 2: *Υπολογίστε τα όρια:*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}\Big),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} + \frac{n}{n^2+n^2}\Big).$$

Χρησιμοποιήστε τους τύπους $\int_a^b \frac{1}{x+1}\,dx = \log\frac{b+1}{a+1}$ $(-1 < a < b)$, $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

Λύση: 1. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}\\
&\qquad=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ και $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$, όπου $x_k=\frac{k}{n}$ $(0\le k\le n)$ και $\xi_k=x_k=\frac{k}{n}$ $(1\le k\le n)$, οπότε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}\\
&\quad=\frac{1}{1+\xi_1}(x_1-x_0)+\frac{1}{1+\xi_2}(x_2-x_1)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\frac{1}{1+\xi_{n-1}}(x_{n-1}-x_{n-2})+\frac{1}{1+\xi_n}(x_n-x_{n-1}).\\
&\quad=\Sigma(f;0,1;\Delta;\Xi).
\end{aligned}$$

Η f είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και πλάτος$(\Delta)=\frac{1}{n}\to 0$ όταν $n\to+\infty$. Άρα

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}\Big)\\
&\quad=\lim_{n\to+\infty}\Sigma(f;0,1;\Delta;\Xi)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\log 2.
\end{aligned}$$

2. Με τον ίδιο τρόπο: γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}+\frac{n}{n^2+n^2}\\
&\qquad=\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n-1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ και $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$, όπου $x_k=\frac{k}{n}$ $(0\le k\le n)$ και $\xi_k=x_k=\frac{k}{n}$ $(1\le k\le n)$, οπότε

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}+\frac{n}{n^2+n^2}\\
&\quad=\frac{1}{1+{\xi_1}^2}(x_1-x_0)+\frac{1}{1+{\xi_2}^2}(x_2-x_1)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\frac{1}{1+{\xi_{n-1}}^2}(x_{n-1}-x_{n-2})+\frac{1}{1+{\xi_n}^2}(x_n-x_{n-1}).\\
&\quad=\Sigma(f;0,1;\Delta;\Xi).
\end{aligned}$$

Η f είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και πλάτος$(\Delta)=\frac{1}{n}\to 0$ όταν $n\to+\infty$. Άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}+\frac{n}{n^2+n^2}\Big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Sigma(f;0,1;\Delta;\Xi) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Άσκηση 3: *Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, βρείτε τα όρια:*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

(Υπόδειξη: Βρείτε τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της $y = \frac{t}{1+t^2}$ στα αντίστοιχα διαστήματα.)

Λύση: Η $y = \frac{t}{1+t^2}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$ και φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα, αν $x \geq 1$, η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $[x, x+\sqrt{x}]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό ίση με $\frac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2}$ και μέγιστη τιμή ίση με $\frac{x}{1+x^2}$. Άρα

$$\frac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2}\big((x+\sqrt{x})-x\big) \leq \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{x}{1+x^2}\big((x+\sqrt{x})-x\big),$$

οπότε

$$\frac{x\sqrt{x}+x}{x^2+2x\sqrt{x}+x+1} \leq \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}\,.$$

Με παρεμβολή:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt = 0.$$

Ομοίως, αν $0 < x \leq 1$, στο διάστημα $[1-x, 1+x]$ η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή $\frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$ και ελάχιστη τιμή την μικρότερη από τις τιμές $\frac{1-x}{1+(1-x)^2}$ και $\frac{1+x}{1+(1+x)^2}$, δηλαδή την $\frac{1-x}{1+(1-x)^2}$. Άρα

$$\frac{1-x}{1+(1-x)^2}\big((1+x)-(1-x)\big) \leq \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}\big((1+x)-(1-x)\big)$$

οπότε

$$\frac{1-x}{1+(1-x)^2} \leq \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}\,.$$

Με παρεμβολή:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,.$$

Άσκηση 4: *Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$ $(0 < a < b)$, αποδείξτε ότι*

$$\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, κατόπιν, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) με

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$ *είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το* 0.

Λύση: Η ανισότητα γράφεται, ισοδύναμα, $\frac{1}{n+1} \leq \log \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$, δηλαδή $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{n}$. Αυτό είναι σωστό, διότι ισχύει $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε x στο διάστημα $[n, n+1]$.

Κατόπιν,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n \leq 0,$$

οπότε η (x_n) είναι φθίνουσα.

Τέλος, προσθέτοντας τις ανισότητες $\log(k+1) - \log k \leq \frac{1}{k}$ για $k = 1, 2, \ldots, n$, βρίσκουμε ότι

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,,$$

οπότε

$$x_n \geq \log(n+1) - \log n > 0.$$

Άσκηση 5: *Έστω* $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 10|x_2 - x_1|$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in [0,1]$.

Αποδείξτε ότι

$$\Big| \int_a^b f(x)\, dx - (b-a) f(b) \Big| \leq 5(b-a)^2$$

για κάθε $[a,b] \subseteq [0,1]$.

Αποδείξτε ότι

$$\Big| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| \leq \frac{5}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Λύση: Είναι

$$\begin{aligned}
\Big| \int_a^b f(x)\, dx - (b-a) f(b) \Big| &\leq \Big| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f(b)\, dx \Big| \\
&= \Big| \int_a^b (f(x) - f(b))\, dx \Big| \leq \int_a^b |f(x) - f(b)|\, dx \\
&\leq 10 \int_a^b |x - b|\, dx = 5(b-a)^2\,.
\end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| &= \Big| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big| \\
&= \Big| \sum_{k=1}^n \Big(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\, dx - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big) \Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \Big| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\, dx - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \Big|
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} 5\Big(\frac{1}{n}\Big)^2 = \frac{5}{n}\,.$$

Άσκηση 6: *Έστω ότι η* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Αποδείξτε ότι*

$$0 \leq \int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

για κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$.

Λύση: Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [c,d]$, συνεπάγεται

$$\int_c^d f(x)\,dx \geq \int_c^d 0\,dx = 0(d-c) = 0.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$, οπότε ισχύει και για τα $[a,c]$ και $[d.b]$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx\\ &\geq 0 + \int_c^d f(x)\,dx + 0 = \int_c^d f(x)\,dx.\end{aligned}$$