Προαπαιτούμενες γνώσεις.

A. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbf{R}$ και οι αλγεβρικές ιδιότητες των τεσσάρων πράξεων στο $\mathbf{R}$.

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Προσέξτε: μερικά βιβλία (τα βιβλία του λυκείου, για παράδειγμα) θεωρούν φυσικό και τον 0, οπότε με $\mathbf{N}$ συμβολίζουν το σύνολο των $0, 1, 2, \dots$ και με $\mathbf{N}^*$ το σύνολο των $1, 2, \dots$.

Το σύνολο των ακεραίων $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ και το σύνολο των ρητών $\mathbf{Q}$.

B. Βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των ανισοτήτων. Για παράδειγμα:

1. Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.
2. Αν $x \leq y$, τότε $x + z \leq y + z$ και $x - z \leq y - z$.
3. Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.
4. Αν $x \leq y$ και $z > 0$, τότε $xz \leq yz$ και $\frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$.
5. Αν $x \leq y$ και $z < 0$, τότε $xz \geq yz$ και $\frac{x}{z} \geq \frac{y}{z}$.
6. Αν $0 < x \leq y$ και $0 < z \leq w$, τότε $0 < xz \leq yw$.

Βασικές ιδιότητες των απόλυτων τιμών. Για παράδειγμα:

1. $|xy| = |x||y|$.
2. Η τριγωνική ανισότητα: $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.
3. Αν $y \neq 0$, τότε $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
4. $|x| \leq a$ αν και μόνο αν $-a \leq x \leq a$.
5. $|x| < a$ αν και μόνο αν $-a < x < a$.

Γ. Η γεωμετρική αναπαράσταση των αριθμών ως σημείων της πραγματικής ευθείας. Η απόλυτη τιμή $|x-y|$ είναι ίση με την απόσταση ανάμεσα στα σημεία τα οποία αναπαριστούν τους αριθμούς x, y.

Δ. Τα διαστήματα: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ και $(-\infty, +\infty)$.

Τα σύμβολα $+\infty, -\infty$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά *σκέτα σύμβολα*· τα $\pm\infty$ δεν είναι αριθμοί. Σκεφτόμαστε το $+\infty$ $(-\infty)$ ως ένα «σημείο» που είναι δεξιά (αριστερά) κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μια «ποσότητα» που είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) από κάθε αριθμό. Για παράδειγμα, γράφουμε

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty$$

για κάθε αριθμό x.

E. Ορισμοί των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες.

Αν ο n είναι θετικός ακέραιος, τότε

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n},$$

Αν $a \neq 0$ και $n = 0$ ή ο n είναι αρνητικός ακέραιος, τότε

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{-n}} \qquad (a \neq 0).$$

Αν ο n είναι άρτιος ακέραιος, τότε $a^n > 0$ για κάθε $a \neq 0$. Αν ο n είναι περιττός ακέραιος, τότε (i) $a^n > 0$ για κάθε $a > 0$ και (ii) $a^n < 0$ για κάθε $a < 0$.

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες:

1. $a^x b^x = (ab)^x\,, \qquad a^x a^y = a^{x+y}\,, \qquad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}\,.$

2. Αν $0 < a < b$, τότε (i) $a^x < b^x$, αν $x > 0$, (ii) $a^0 = b^0 = 1$ και (iii) $a^x > b^x$, αν $x < 0$.

3. Αν $x < y$, τότε (i) $a^x < a^y$, αν $a > 1$, (ii) $1^x = 1^y = 1$ και (iii) $a^x > a^y$, αν $0 < a < 1$.

Η αλγεβρική ταυτότητα

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

αν ο n είναι φυσικός ≥ 2.

ΣΤ. Οι ρίζες των αριθμών.

Αν ο n είναι άρτιος φυσικός, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς δυο λύσεις, μια θετική και την αντίθετη αρνητική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $a = 0$, και (iii) καμιά λύση, αν $a < 0$.

Αν ο n είναι περιττός φυσικός, τότε η $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς μια λύση, θετική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $a = 0$, και (iii) ακριβώς μια λύση, αρνητική, αν $a < 0$.

Αν ο n είναι περιττός φυσικός, τότε για κάθε a τη μοναδική λύση της εξίσωσης $x^n = a$ την ονομάζουμε n-οστή ρίζα του a και τη συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a}\,.$$

Αν ο n είναι άρτιος, τότε για κάθε $a \geq 0$ τη μοναδική *μη αρνητική* λύση της $x^n = a$ την ονομάζουμε και πάλι n-οστή ρίζα του a και τη συμβολίζουμε και πάλι $\sqrt[n]{a}\,$.

Άρα είναι $\sqrt[n]{0} = 0$ για κάθε n και $\sqrt[n]{a} > 0$ για κάθε $a > 0$ και κάθε n. Επίσης, στην περίπτωση $a < 0$ είναι $\sqrt[n]{a} < 0$ για κάθε περιττό n ενώ δεν ορίζεται ο $\sqrt[n]{a}$ για κανέναν άρτιο n.

Προσέξτε: σε πολλά βιβλία (στα βιβλία του λυκείου, για παράδειγμα) δεν ορίζονται οι n-οστές ρίζες αρνητικών αριθμών ούτε όταν ο n είναι περιττός φυσικός.

Ζ. Ορισμοί των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

Θεωρούμε ρητό r και γράφουμε $r = \frac{m}{n}$, όπου ο m είναι ακέραιος, ο n είναι θετικός ακέραιος και (μετά από απλοποίηση) οι m, n είναι σχετικά πρώτοι, δηλαδή έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1. Η συγκεκριμένη γραφή του r ονομάζεται ανάγωγη μορφή του και είναι μοναδική. Τώρα, ορίζουμε

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m$$

με τις εξής διευκρινήσεις: (i) αν $a > 0$, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα διότι ο $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται, (ii) αν $a = 0$, τότε είναι $\sqrt[n]{0} = 0$, οπότε πρέπει να είναι $m > 0$ ή, ισοδύναμα, $r > 0$ και τότε $0^r = (\sqrt[n]{0})^m = 0^m = 0$ και (iii) αν $a < 0$, τότε πρέπει ο n να είναι περιττός για να ορίζεται ο $\sqrt[n]{a}$. Με άλλα λόγια:

Ο a^r ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$ και $r > 0$ και (iii) αν $a < 0$ και ο παρονομαστής στην ανάγωγη μορφή του r είναι περιττός.

Ο a^r δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$ και $r \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$ και ο παρονομαστής στην ανάγωγη μορφή του r είναι άρτιος.

Ας θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό n και τον αντίστοιχο ρητό $\frac{1}{n}$. Είναι φανερό ότι η ανάγωγη μορφή του $\frac{1}{n}$ είναι ακριβώς η $\frac{1}{n}$. Άρα ο $a^{\frac{1}{n}}$ ταυτίζεται εξ ορισμού με τον $(\sqrt[n]{a})^1 = \sqrt[n]{a}$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} .$$

Προσέξτε: σε πολλά βιβλία (στα βιβλία του λυκείου, για παράδειγμα) δεν ορίζονται οι δυνάμεις αρνητικών αριθμών με ρητούς εκθέτες.

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες ισχύουν και για τις δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

Η. Οι δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Γνωρίζουμε (χωρίς αιτιολόγηση) ότι ορίζεται η δύναμη

$$a^x$$

όταν $a > 0$ και ο x είναι άρρητος. Επίσης ορίζεται

$$0^x = 0$$

αν ο x είναι θετικός άρρητος.

Άρα, αν ο x είναι άρρητος, η δύναμη a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$ και (ii) αν $a = 0$ και $x > 0$. Η δύναμη a^x δεν ορίζεται (i) αν $a < 0$ και ο x είναι άρρητος και (ii) αν $a = 0$ και ο x είναι άρρητος < 0.

Συνολικό συμπέρασμα:

Ο a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$ και ο x είναι οποιοσδήποτε αριθμός, (ii) αν $a = 0$ και $x > 0$ και (iii) αν $a < 0$ και ο x είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.

Ο a^x δεν ορίζεται (i) αν $a=0$ και $x\le 0$ και (ii) αν $a<0$ και ο x είναι άρρητος η ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν για οποιουσδήποτε πραγματικούς εκθέτες.

Θ. Ορισμοί των λογαρίθμων.

Γνωρίζουμε (χωρίς απόδειξη) ότι για κάθε $a>0$, $a\neq 1$, και κάθε $y>0$ υπάρχει μοναδικός x ώστε να είναι $a^x=y$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x=y$ ονομάζεται λογάριθμος του y με βάση a και συμβολίζεται

$$\log_a y.$$

Με άλλα λόγια, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x=\log_a y \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad a^x=y.$$

Οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων (με βάσεις $a,b>0$, $a,b\neq 1$):

1. $\log_a(yz)=\log_a y+\log_a z$ για κάθε $y,z>0$.

2. $\log_a \frac{y}{z}=\log_a y-\log_a z$ για κάθε $y,z>0$.

3. $\log_a(y^z)=z\log_a y$ για κάθε $y>0$ και κάθε z.

4. $\log_a 1=0$ και $\log_a a=1$.

5. Έστω $0<y<z$. Τότε (i) $\log_a y<\log_a z$, αν $a>1$, και (ii) $\log_a y>\log_a z$, αν $0<a<1$.

6. $\log_b y=\frac{1}{\log_a b}\log_a y$ για κάθε $y>0$.

Ι. Τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Θεωρούνται γνωστοί οι *γεωμετρικοί ορισμοί* των τριγωνομετρικών αριθμών βάσει του τριγωνομετρικού κύκλου. Προσέξτε: θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad \cot x$$

αντί των αντίστοιχων ημ x, συν x, εφ x, σφ x που χρησιμοποιούνται στα βιβλία του λυκείου. Οι αριθμοί $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ και $\cot x$ ονομάζονται, αντιστοίχως, ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη του x. Και οι τέσσερις αυτοί αριθμοί ονομάζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί του x.

Ο αριθμός $\tan x$ δεν ορίζεται αν $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$. Ο αριθμός $\cot x$ δεν ορίζεται αν $x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Μερικές βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών αριθμών:

1. Είναι $\cos x>0$, αν ο x ανήκει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{\pi}{2}+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$, και $\cos x<0$, αν ο x ανήκει στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$. Επίσης, είναι $\sin x>0$, αν ο x ανήκει στο διάστημα $(k2\pi, \pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$, και $\sin x<0$, αν

ο x ανήκει στο διάστημα $(\pi + k2\pi, 2\pi + k2\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

2. $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \sin x \le 1$.

3. $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

5. $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$.

6. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$, $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$.

7. $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$.

8. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

9. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.

10. Έστω k ακέραιος. Τότε (i) $\cos x > \cos x'$, αν $k2\pi \le x < x' \le \pi + k2\pi$, και (ii) $\cos x < \cos x'$, αν $\pi + k2\pi \le x < x' \le 2\pi + k2\pi$.

11. Έστω k ακέραιος. Τότε (i) $\sin x < \sin x'$, αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \le x < x' \le \frac{\pi}{2} + k2\pi$, και (ii) $\sin x > \sin x'$, αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi \le x < x' \le \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

Κ. Η γενική έννοια του συνόλου και η έννοια του ανήκειν: γράφουμε $x \in A$ και λέμε ότι «το x ανήκει στο σύνολο A» αν το x είναι στοιχείο του συνόλου A. Η άρνηση του $x \in A$ γράφεται $x \notin A$.

Το $\emptyset$ ονομάζεται κενό σύνολο και δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

Το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$: γράφουμε $A \subseteq B$. Το $\emptyset$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Απλές πράξεις ανάμεσα σε δυο σύνολα A, B: η ένωση $A \cup B = \{x : x \in A$ είτε $x \in B\}$, η τομή $A \cap B = \{x : x \in A$ και $x \in B\}$ και η διαφορά $A \setminus B = \{x : x \in A$ και $x \notin B\}$.

Λ. Η γενική έννοια της συνάρτησης

$$f : A \to B$$

με πεδίο ορισμού το A και σύνολο τιμών υποσύνολο του B. Λέμε «η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$», όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίρνει τιμές από το A και η εξαρτημένη μεταβλητή y παίρνει τιμές από το B. Σε κάθε τιμή της x από το A αντιστοιχεί (μέσω της f) μια ακριβώς (δηλαδή μια και μόνο μια) τιμή της y από το B: εκείνη που προσδιορίζεται από τον τύπο $y = f(x)$. Πολλές φορές, χάριν συντομίας, αντί «η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$» λέμε «η συνάρτηση $y = f(x)$».

Το σύνολο των τιμών της f είναι το $\{f(x) : x \in A\} = \{y \in B :$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = f(x)\}$.

Στο σύνολο τιμών της f ανήκουν ακριβώς εκείνες οι τιμές της μεταβλητής y για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x έχει μια τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού.

Γενικότερα, αν $A' \subseteq A$, τότε $f(A') = \{f(x) : x \in A'\} = \{y \in B : \text{υπάρχει } x \in A' \text{ ώστε } y = f(x)\}$. Για παράδειγμα: το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)$.

Συνάρτηση ένα - προς - ένα και συνάρτηση επί. Αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Αν η $f : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ και

$$x = f^{-1}(y) \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad f(x) = y.$$

M. Για πραγματικές συναρτήσεις μια πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή $f : A \to \mathbf{R}$, όπου $A \subseteq \mathbf{R}$.

Γραφική παράσταση (ή γράφημα) συνάρτησης. Το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ είναι η κατακόρυφη προβολή του γραφήματός της πάνω στον x-άξονα και το σύνολο τιμών της είναι η οριζόντια προβολή του γραφήματος πάνω στον y-άξονα.

Συνάρτηση αύξουσα (φθίνουσα, μονότονη) σε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Συνάρτηση γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα, γνησίως μονότονη) σε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα), τότε η αντίστροφή της συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα).

Συνάρτηση άνω φραγμένη (κάτω φραγμένη, φραγμένη) σε υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

(i) Το γράφημα της $y = -f(x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον x-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$. (ii) Το γράφημα της $y = f(-x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον y-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$. (iii) Το γράφημα της $y = f(x)+\kappa$ είναι η κατακόρυφη μεταφορά κατά κ (προς τα πάνω, αν $\kappa > 0$, και προς τα κάτω, αν $\kappa < 0$) του γραφήματος της $y = f(x)$. (iv) Το γράφημα της $y = f(x-\kappa)$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά κ (προς τα δεξιά, αν $\kappa > 0$, και προς τα αριστερά, αν $\kappa < 0$) του γραφήματος της $y = f(x)$.

Τα γραφήματα μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο (την ευθεία με εξίσωση $y = x$).

Περιοδική συνάρτηση.

N. Συγκεκριμένες συναρτήσεις.

Πολυωνυμικές συναρτήσεις. Μονοτονία και γραφήματα των $y = ax + b$ και των $y = ax^2 + bx + c$. Μονοτονία και γραφήματα των $y = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Ρητές συναρτήσεις. Μονοτονία και γραφήματα των $y = \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Μονοτονία και γραφήματα των συναρτήσεων: $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbf{N})$, $y = x^a$ $(a \in \mathbf{R})$, $y = a^x$ $(a > 0)$, $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

Ξ. Δεν χρειάζεται να γνωρίζετε τίποτα για όρια συναρτήσεων, συνέχεια συναρτήσεων, παραγώγους και ολοκληρώματα.