Σεμινάριο

Απειροστικού Λογισμού

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

1 Η Ιδιότητα Συνέχειας των πραγματικών αριθμών.

Στην ενότητα αυτή θα γνωρίσουμε τη σημαντικότερη ιδιότητα του $\mathbf{R}$. Θα δούμε πώς *με βάση την ιδιότητα αυτή αποδεικνύονται μερικά σημαντικά αποτελέσματα της Απειροστικού Λογισμού.*

Στα παρακάτω, όλοι οι αριθμοί θα είναι πραγματικοί, δηλαδή στοιχεία του $\mathbf{R}$, και όλα τα σύνολα θα είναι υποσύνολα του $\mathbf{R}$.

Η Ιδιότητα Συνέχειας. *Έστω μη κενά σύνολα A, B ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Τότε υπάρχει ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Το γεωμετρικό ανάλογο της Ιδιότητας Συνέχειας είναι απλό. Αν τα A, B είναι δυο μη κενά σύνολα σημείων πάνω στην πραγματική ευθεία και αν το A είναι αριστερά του B, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της ευθείας ανάμεσα στα δυο σύνολα: αν δεν υπήρχε τέτοιο σημείο, τότε θα υπήρχε *χάσμα* ανάμεσα στα δυο σύνολα. Επομένως, η Ιδιότητα Συνέχειας λέει ότι «η πραγματική ευθεία δεν έχει χάσματα» ή, με άλλα λόγια, ότι «είναι συνεχής», ότι «δεν διακόπτεται».

Πρέπει να επισημάνουμε ότι *η Ιδιότητα Συνέχειας είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του $\mathbf{R}$ και όχι όλων των άλλων συνόλων. Θα δούμε λίγο αργότερα ότι, για παράδειγμα, το $\mathbf{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα αυτή.*

Θεώρημα 1.1 *Για κάθε b υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > b$.*

Απόδειξη: Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει b ώστε $n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε το $B = \{b : n \leq b \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N}\}$ δεν είναι κενό.

Προφανώς, ισχύει $n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $b \in B$. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε $n \leq \xi \leq b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $b \in B$.

Επειδή $\xi - 1 < \xi$, ο $\xi - 1$ δεν ανήκει στο B. Άρα υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > \xi - 1$ και, επομένως, $n + 1 > \xi$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $n + 1 \in \mathbf{N}$. $\natural$

Πρόταση 1.1 ***Αρχιμήδεια Ιδιότητα.*** *Για κάθε $a > 0$ υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < a$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $b = \frac{1}{a}$. $\natural$

Πρόταση 1.2 *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbf{Z}$ ώστε $k \leq x < k + 1$.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1 υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > x$ και υπάρχει $m \in \mathbf{N}$, $m > -x$. Ορίζουμε $l = -m$, οπότε $l < x < n$. Οι l, n είναι ακέραιοι.

Αν για κάθε ακέραιο $k \leq x$ ίσχυε $k + 1 \leq x$, τότε, βάσει της αρχής της επαγωγής, θα ήταν $l, l + 1, l + 2, \ldots \leq x$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι $n > x$. Επομένως, η υπόθεση «για κάθε ακέραιο $k \leq x$ ισχύει $k + 1 \leq x$» δεν είναι σωστή, οπότε υπάρχει ακέραιος $k \leq x$ ώστε $k + 1 > x$.

Έστω $k' \leq x < k' + 1$ για κάποιον $k' \in \mathbf{Z}$. Τότε $k < k' + 1$ και $k' < k + 1$, οπότε $-1 < k' - k < 1$. Επειδή $k' - k \in \mathbf{Z}$, συνεπάγεται $k' - k = 0$ και $k' = k$. $\natural$

Ο $k \in \mathbf{Z}$ της Πρότασης 1.2 ονομάζεται **ακέραιο μέρος** του x και τον συμβολίζουμε $[x]$. Δηλαδή,

$$[x] \leq x < [x] + 1, \qquad [x] \in \mathbf{Z}.$$

Πρόταση 1.3 ***Πυκνότητα του $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{R}$.*** *Για κάθε a, b, $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbf{Q}$ ώστε $a < r < b$.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > \frac{1}{b-a}$. Θεωρούμε τον ακέραιο $m = [na] + 1$. Τότε $na < [na] + 1 = m \leq na + 1 < nb$ και, επομένως, $a < \frac{m}{n} < b$. Άρα για τον ρητό $r = \frac{m}{n}$ ισχύει $a < r < b$. ♮

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι: (i) αν $a \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a \leq 0$ (*Υπόδ.:* Υποθέστε $a > 0$ και καταλήξτε σε άτοπο.), (ii) αν $a \leq b + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a \leq b$, (iii) αν $|a - b| \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a = b$.

2. Αποδείξτε ότι το διάστημα $[a, b)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Αποδείξτε ότι το $(a, +\infty)$ δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

3. Δείτε ότι τα $A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty)$ ικανοποιούν την υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας και βρείτε όλους τους ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Κάντε το ίδιο για τα: (i) $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, +\infty)$, (ii) $A = (-4, -2)$, $B = (-2, +\infty)$, (iii) $A = (-\infty, 0)$, $B = [1, 13]$.

4. Έστω μη κενά A, B ώστε $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{R}$ και $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε είτε $A = (-\infty, \xi), B = [\xi, +\infty)$ είτε $A = (-\infty, \xi], B = (\xi, +\infty)$.

5. Έστω μη κενά A, B ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $b - a \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι υπάρχει *ακριβώς ένας* ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

6. Αποδείξτε ότι: (i) αν $a \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $a \leq 0$ (*Υπόδ.:* Υποθέστε $a > 0$ και καταλήξτε σε άτοπο.), (ii) αν $a \leq b + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $a \leq b$, (iii) αν $|a - b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $a = b$.
   Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 1.

7. Δείτε ότι τα $A = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας και βρείτε όλους τους ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Κάντε το ίδιο για τα $A = \{r \in \mathbf{Q} : r < 0\}$, $B = \{r \in \mathbf{Q} : r > 0\}$.

8. Αποδείξτε ότι: (i) αν $x \leq a$ για κάθε $x < b$, τότε $b \leq a$, (ii) αν $r \leq a$ για κάθε $r \in \mathbf{Q}$, $r < b$, τότε $b \leq a$, (iii) αν $\{r \in \mathbf{Q} : r > a\} = \{r \in \mathbf{Q} : r > b\}$, τότε $a = b$, (iv) αν $\{r \in \mathbf{Q} : r < a\} \cap \{r \in \mathbf{Q} : r > b\} = \emptyset$, τότε $a \leq b$.

2 Ρίζες.

Κάτι που δεν αποδεικνύεται στο λύκειο αλλά ούτε και σε στοιχειώδη μαθήματα Απειροστικού Λογισμού είναι η ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών. Αυτήν την απόδειξη θα δούμε τώρα στην ειδική περίπτωση των τετραγωνικών ριζών.

Θεώρημα 2.1 *Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $a > 0$ υπάρχει μοναδικός $x > 0$ ώστε $x^n = a$.*

Απόδειξη για $n = 2$: Θεωρούμε πρώτα την ειδική περίπτωση: $a \geq 1$.

Ορίζουμε τα $Y = \{y : y > 0, y^2 \leq a\}$, $Z = \{z : z > 0, z^2 \geq a\}$.

Επειδή $a \geq 1$, συνεπάγεται $1^2 = 1 \leq a$, οπότε $1 \in Y$. Για τον ίδιο λόγο, συνεπάγεται $a^2 \geq a$, οπότε $a \in Z$. Άρα τα Y, Z δεν είναι κενά. Για κάθε $y \in Y$, $z \in Z$ ισχύει $y^2 \leq a \leq z^2$, οπότε $y^2 \leq z^2$ και, επειδή $y, z > 0$, συνεπάγεται $y \leq z$. Βάσει της Ιδιότητας Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε $y \leq \xi \leq z$ για κάθε $y \in Y$, $z \in Z$. Θα αποδείξουμε ότι $\xi^2 = a$.

Έστω $0 < \epsilon < \xi$. Επειδή $\xi - \epsilon < \xi$, ο $\xi - \epsilon$ δεν ανήκει στο Z. Άρα $\xi - \epsilon \leq 0$ ή $(\xi - \epsilon)^2 < a$. Το πρώτο δεν ισχύει, οπότε $(\xi - \epsilon)^2 < a$. Συνεπάγεται $\xi^2 - 2\xi\epsilon + \epsilon^2 < a$, οπότε $\xi^2 - 2\xi\epsilon < a$, οπότε $\frac{\xi^2 - a}{2\xi} < \epsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, $\epsilon < \xi$, οπότε ισχύει και για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα $\frac{\xi^2 - a}{2\xi} \leq 0$, οπότε $\xi^2 \leq a$.

Έστω $0 < \epsilon < 1$. Επειδή $\xi + \epsilon > \xi$, ο $\xi + \epsilon$ δεν ανήκει στο Y. Άρα $\xi + \epsilon \leq 0$ ή $(\xi + \epsilon)^2 > a$. Το πρώτο δεν ισχύει, οπότε $(\xi + \epsilon)^2 > a$. Συνεπάγεται $\xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon^2 > a$, οπότε $\xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon > a$, οπότε $\frac{a - \xi^2}{2\xi + 1} < \epsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, $\epsilon < 1$, οπότε ισχύει και για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα $\frac{a - \xi^2}{2\xi + 1} \leq 0$ και, επομένως, $\xi^2 \geq a$.

Από τις ανισότητες $\xi^2 \leq a$ και $\xi^2 \geq a$ συνεπάγεται $\xi^2 = a$.

Αν $\xi_1, \xi_2 > 0$, ${\xi_1}^2 = a$, ${\xi_2}^2 = a$, τότε ${\xi_1}^2 = {\xi_2}^2$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$.

Θεωρούμε, τέλος, την περίπτωση: $0 < a < 1$. Τότε είναι $\frac{1}{a} > 1$, οπότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $\xi^2 = \frac{1}{a}$. Αν ορίσουμε $\eta = \frac{1}{\xi} > 0$, συνεπάγεται $\eta^2 = a$. Η απόδειξη της μοναδικότητας του η είναι όπως στην πρώτη περίπτωση (για τον ξ). $\natural$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1 είναι το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.1 *Το $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ δεν είναι κενό.*

Απόδειξη: Υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $\xi^2 = 2$. Από το λύκειο γνωρίζουμε ότι $\xi \notin \mathbf{Q}$. Ας θυμηθούμε την σύντομη απόδειξη.

Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $\xi \in \mathbf{Q}$, οπότε $\xi = \frac{m}{n}$, όπου $m, n \in \mathbf{N}$. Απλοποιώντας, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m, n δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Από την $\xi^2 = 2$ συνεπάγεται $m^2 = 2n^2$. Άρα ο m^2 είναι άρτιος, οπότε και ο m είναι άρτιος (γιατί;). Άρα $m = 2k$ για κάποιον $k \in \mathbf{N}$. Συνεπάγεται $2k^2 = n^2$. Άρα ο n^2 είναι άρτιος, οπότε και ο n είναι άρτιος. Άρα $n = 2l$ για κάποιον $l \in \mathbf{N}$. Καταλήγουμε στο ότι ο 2 είναι κοινός διαιρέτης των m, n, το οποίο είναι άτοπο. $\natural$

Συμπεραίνουμε ότι *η ύπαρξη έστω και ενός αρρήτου βασίζεται στο Θεώρημα 2.1 του οποίου η απόδειξη χρησιμοποιεί την Ιδιότητα Συνέχειας.*

Πρόταση 2.2 *Το* $\mathbf{Q}$ *δεν έχει την Ιδιότητα Συνέχειας.*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.1 τον $\xi > 0$ με την ιδιότητα $\xi^2 = 2$. Ορίζουμε τα σύνολα $A = \{a \in \mathbf{Q} : a < \xi\}$ και $B = \{b \in \mathbf{Q} : b > \xi\}$. Τα A, B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbf{Q}$ και έχουν, προφανώς, την ιδιότητα: $a \le b$ για κάθε $a \in A, b \in B$ (διότι $a < \xi < b$). Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το $\mathbf{Q}$ *έχει* την Ιδιότητα Συνέχειας. Τότε θα υπάρχει κάποιος $\eta \in \mathbf{Q}$ ώστε να ισχύει $a \le \eta \le b$ για κάθε $a \in A, b \in B$. Ο η είναι ρητός και ο ξ είναι άρρητος, οπότε $\eta \ne \xi$. Αν $\eta < \xi$, υπάρχει (από την Πρόταση 1.3) $r \in \mathbf{Q}$ ώστε $\eta < r < \xi$ και προκύπτει άτοπο: $r \in A$ (αφού $r < \xi$) και $r \notin A$ (αφού $r > \eta$). Ομοίως, αν $\xi < \eta$, υπάρχει (από την Πρόταση 1.3) $r \in \mathbf{Q}$ ώστε $\xi < r < \eta$ και προκύπτει άτοπο: $r \in B$ (αφού $r > \xi$) και $r \notin B$ (αφού $r < \eta$). Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε το $\mathbf{Q}$ δεν έχει την Ιδιότητα Συνέχειας. $\natural$

Αν $n \in \mathbf{N}$ και $a > 0$, τότε τη μοναδική λύση της εξίσωσης $x^n = a$ την ονομάζουμε **n-οστή ρίζα** του a και τη συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a}\,.$$

Αυτή η ορολογία είναι γνωστή από το λύκειο, αλλά η *ύπαρξη* της n-οστής ρίζας του a αποδεικνύεται στο Θεώρημα 2.1 με βάση την Ιδιότητα Συνέχειας του $\mathbf{R}$.

Ασκήσεις.

1. **Πυκνότητα του $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ στο $\mathbf{R}$.** Αποδείξτε ότι για κάθε a, b, $a < b$ υπάρχει $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ώστε $a < x < b$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε τους $a + \sqrt{2}$, $b + \sqrt{2}$.)

3 Supremum και infimum.

Έστω μη κενό σύνολο A. Το A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει u ώστε $u \ge a$ για κάθε $a \in A$ ή, ισοδύναμα, $A \subseteq (-\infty, u]$. Κάθε u με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A. Φυσικά, αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε $u' \ge u$ είναι, επίσης, άνω φράγμα του A. Ομοίως, το A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει l ώστε $l \le a$ για κάθε $a \in A$ ή, ισοδύναμα, $A \subseteq [l, +\infty)$. Κάθε l με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** του A. Αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε $l' \le l$ είναι κι αυτός κάτω φράγμα του A. Τέλος, το A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε $A \subseteq [l, u]$.

Παραδείγματα: (1) Τα άνω φράγματα του $[a, b]$ είναι, προφανώς, όλοι οι $u \ge b$ και κανένας άλλος. Το ίδιο ισχύει και για τα $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$. Παρατηρήστε: όλα αυτά τα διαστήματα έχουν κάποιο *ελάχιστο* άνω φράγμα, τον b.

(2) Τα κάτω φράγματα καθενός από τα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ είναι όλοι οι $l \le a$ και κανένας άλλος. Παρατηρήστε και πάλι: όλα αυτά τα

διαστήματα έχουν κάποιο *μέγιστο* κάτω φράγμα, τον a.

(3) Προφανώς, τα $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.

(4) Το $\mathbf{N}$ είναι κάτω φραγμένο και, επειδή ο 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του, τα κάτω φράγματα του $\mathbf{N}$ είναι όλοι οι $l \leq 1$ και κανένας άλλος. Δηλαδή, ο 1 είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του $\mathbf{N}$.

Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα 1.1 λέει, ακριβώς, ότι *το* $\mathbf{N}$ *δεν είναι άνω φραγμένο*: δεν υπάρχει u που να είναι άνω φράγμα του $\mathbf{N}$ αφού για κάθε u υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > u$. Όσο περίεργο κι αν φαίνεται, η απόδειξη του ότι το $\mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο βασίζεται στην Ιδιότητα Συνέχειας!!

Εκτός από την Ιδιότητα Συνέχειας το $\mathbf{R}$ έχει μια εξ ίσου σημαντική ιδιότητα.

Η Ιδιότητα Supremum. *Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Λέμε ότι οι δυο ιδιότητες του $\mathbf{R}$, η Ιδιότητα Συνέχειας και η Ιδιότητα Supremum, είναι εξ ίσου σημαντικές διότι, όπως θα δούμε σε λίγο, είναι ισοδύναμες: αν υποθέσουμε ότι ισχύει μια από αυτές, αποδεικνύεται ότι ισχύει και η άλλη.

Υπάρχει και μια ιδιότητα «συμμετρική» της Ιδιότητας Supremum:

Η Ιδιότητα Infimum. *Κάθε μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

Και η Ιδιότητα Infimum είναι ισοδύναμη με την Ιδιότητα Συνέχειας.

Το **ελάχιστο άνω φράγμα** ενός μη κενού, άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και **supremum** του A και συμβολίζεται

$$\sup A.$$

Το **μέγιστο κάτω φράγμα** ενός μη κενού, κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και **infimum** του A και συμβολίζεται

$$\inf A.$$

Παραδείγματα: Όλα τα $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ έχουν το ίδιο supremum, τον b. Ομοίως, όλα τα $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ έχουν το ίδιο infimum, τον a.

Το μέγιστο στοιχείο, αν υπάρχει, ενός συνόλου A ονομάζεται και **maximum** του A και συμβολίζεται $\max A$. Επίσης, το ελάχιστο στοιχείο, αν υπάρχει, του A ονομάζεται και **minimum** του A και συμβολίζεται $\min A$.

Πρόταση 3.1 (1) *Αν υπάρχει το* $\max A$*, τότε* $\sup A = \max A$.
(2) *Αν υπάρχει το* $\min A$*, τότε* $\inf A = \min A$.

Απόδειξη: (1) Το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A. Δε μπορεί να υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο από το $\max A$, αφού το $\max A$ *είναι στοιχείο* του A.

(2) Ομοίως. ♮

Παραδείγματα: (1) Το $A = \{0\} \cup [2,3] \cup \{4\}$ έχει $\min A = 0$ και $\max A = 4$. Άρα $\inf A = 0$, $\sup A = 4$.

(2) $\min \mathbf{N} = 1$, οπότε $\inf \mathbf{N} = 1$.

(3) Το $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\max A = 1$, οπότε $\sup A = 1$.

Προφανώς, κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα του A. Φαίνεται, μάλιστα, ότι δεν υπάρχει άλλο κάτω φράγμα του A και αυτό θα το αποδείξουμε ως εξής. Αν $l > 0$, τότε, βάσει της Αρχιμήδειας Ιδιότητας, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l$. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι $< l$. Άρα ο l δεν είναι κάτω φράγμα του A.

Άρα το A δεν έχει κάτω φράγμα > 0 και, επομένως, $\inf A = 0$.

Αν το μη κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε

$$\sup A = +\infty.$$

Αιτιολογούμε τον ορισμό. Το ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο σημαίνει ότι δεν έχει ως άνω φράγμα κανέναν *αριθμό*. Όμως, το $+\infty$ συμβολίζει μια «ποσότητα» μεγαλύτερη από κάθε αριθμό, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως το μοναδικό, και, επομένως, το ελάχιστο, «άνω φράγμα» του A.

Ομοίως, αν το μη κενό A δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε

$$\inf A = -\infty.$$

Παράδειγμα: Το $\mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup \mathbf{N} = +\infty$.

Θεώρημα 3.1 *Η Ιδιότητα Συνέχειας και η Ιδιότητα Supremum του* $\mathbf{R}$ *είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ισχύει η Ιδιότητα Συνέχειας και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και η Ιδιότητα Supremum.

Έστω μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο A. Θεωρούμε το σύνολο $U = \{u : u$ άνω φράγμα του $A\}$. Το U δεν είναι κενό αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα του A. Προφανώς, ισχύει $a \leq u$ για κάθε $a \in A$, $u \in U$. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε $a \leq \xi \leq u$ για κάθε $a \in A$, $u \in U$. Επειδή $a \leq \xi$ για κάθε $a \in A$, ο ξ είναι άνω φράγμα του A. Επειδή $\xi \leq u$ για κάθε $u \in U$, ο ξ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.

Αποδείξαμε ότι κάθε μη κενό, άνω φραγμένο A έχει ελάχιστο άνω φράγμα, οπότε ισχύει η Ιδιότητα Supremum.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ισχύει η Ιδιότητα Supremum και θα αποδείξουμε την Ιδιότητα Συνέχειας.

Έστω μη κενά σύνολα A, B ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Το A είναι άνω φραγμένο διότι κάθε στοιχείο του B είναι, προφανώς, άνω φράγμα του A. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Ας ονομάσουμε $\xi = \sup A$. Επειδή το ξ είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $a \leq \xi$ για κάθε $a \in A$. Επειδή κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A και επειδή το ξ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, ισχύει $\xi \leq b$ για κάθε $b \in B$. Άρα ισχύει $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

Αποδείξαμε ότι, αν για τα μη κενά σύνολα A, B ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$, τότε υπάρχει ξ ώστε να ισχύει $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Άρα αποδείξαμε την Ιδιότητα Συνέχειας. $\natural$

Πρόταση 3.2 *Έστω μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο A. Τότε*
(i) ισχύει $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$ και
(ii) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\sup A - \epsilon < a$ (και, επομένως, $\sup A - \epsilon < a \leq \sup A$).

Απόδειξη: (i) Ισχύει $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$, επειδή το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A.
(ii) Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\sup A - \epsilon < \sup A$ και επειδή το $\sup A$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, το $\sup A - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως, υπάρχει $a \in A$ ώστε $a > \sup A - \epsilon$. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Γιατί τα κάτω φράγματα των $(a, +\infty)$, (a, b), $(a, b]$ είναι μόνο οι $l \leq a$;

2. (1) Βρείτε τα inf, sup των: $\{-1, 0, 2, 5\}$, $[-1, 5]$, $(-1, 5)$, $(-1, 0] \cup (2, 5]$. Τι παρατηρείτε; (2) Έστω $\inf A = \inf B$, $\sup A = \sup B$. Συνεπάγεται $A = B$;

3. Βρείτε τα inf, sup των: $\{(-1)^n n : n \in \mathbf{N}\}$, $\{\frac{1+(-1)^n}{2n} + \frac{1-(-1)^n}{2} n : n \in \mathbf{N}\}$, $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, $\{\frac{n-(-1)^n(n-1)}{2n} : n \in \mathbf{N}\}$, $\{(-1)^n(1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbf{N}\}$, $\{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbf{N}\}$.

4. Έστω μη κενό A. Περιγράψτε το σύνολο των άνω φραγμάτων του A, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $\sup A = +\infty$, $\sup A < +\infty$.

5. Έστω $a < b$, $A = \{r \in \mathbf{Q} : a < r < b\}$. Βρείτε τα $\inf A$, $\sup A$.

6. Έχοντας υπόψη τα παραδείγματα $A = [0, 2]$, $A = [0, 2)$, $A = [0, 1] \cup \{2\}$ και την Πρόταση 3.2, απαντήστε, γενικά, στα παρακάτω.
Έστω μη κενό A και $u = \sup A$. Είναι σωστό ότι $A \cap (u - \epsilon, u] \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$; Είναι σωστό ότι $A \cap (u - \epsilon, u) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$; Ποια είναι η απάντηση στα ίδια ερωτήματα αν, επιπλέον, $u \notin A$;

7. Έστω μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο A. Αποδείξτε ότι (i) ισχύει $\inf A \leq a$ για κάθε $a \in A$ και (ii) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $a < \inf A + \epsilon$ (και, επομένως, $\inf A \leq a < \inf A + \epsilon$).

8. Έστω μη κενά A, B. (1) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. (2) Έστω $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Περιγράψτε το σύνολο όλων των ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. (3) Έστω $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $b - a \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$. Συσχετίστε με την άσκηση 5 της ενότητας 1.

9. Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό σύνολο A έχει supremum και infimum και ότι $\inf A \leq \sup A$.

10. Έστω μη κενά A, B, $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

11. Έστω μη κενό I ώστε να ισχύει $[x_1, x_2] \subseteq I$ για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2$. Δηλαδή, για κάθε δυο σημεία του I το I περιέχει ολόκληρο το διάστημα ανάμεσα σ΄ αυτά τα σημεία. Αποδείξτε ότι το I είναι διάστημα. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε τα $\inf I$, $\sup I$.)

12. Αποδείξτε ότι η Ιδιότητα Συνέχειας και η Ιδιότητα Infimum είναι ισοδύναμες.

13. Έστω μη κενά A, B. Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

4 Όρια μονότονων ακολουθιών.

Θα αποδείξουμε τώρα μια σημαντική ιδιότητα των μονότονων ακολουθιών, η οποία μένει αναπόδεικτη σε στοιχειώδη μαθήματα απειροστικού λογισμού.

Θεώρημα 4.1 *Έστω αύξουσα ακολουθία (x_n). Αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη, τότε συγκλίνει. Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε αποκλίνει στο $+\infty$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα της (x_n), οπότε υπάρχει όρος της (x_n) ο οποίος είναι $> M$. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να είναι $x_{n_0} > M$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να είναι $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Τώρα, έστω ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει u ώστε να είναι $x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, δηλαδή το σύνολο των όρων της (x_n). Είναι σαφές ότι ο u είναι άνω φράγμα του A, οπότε, σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω $x = \sup A$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2: υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι $> x - \epsilon$. Δηλαδή, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x - \epsilon < x_{n_0}$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x - \epsilon < x_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Και επειδή το x είναι άνω φράγμα του A, είναι $x - \epsilon < x_n \leq x < x + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα είναι $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να είναι $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. $\natural$

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 είναι φανερό ότι, στην περίπτωση που η αύξουσα ακολουθία (x_n) είναι άνω φραγμένη, *το όριό της είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της.*

Ασκήσεις.

1. Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n). Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, τότε συγκλίνει και, αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε αποκλίνει στο $-\infty$.

5 Τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις.

Στην ενότητα αυτή θα έχουμε την ευκαιρία για μια ακόμη φορά να ελέγξουμε την ισχύ της Ιδιότητας Συνέχειας ή της ισοδύναμης Ιδιότητας Supremum, αποδεικνύοντας τα τρία βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.1 ***Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αν $f(a) < \lambda < f(b)$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) < \lambda\}.$$

Είναι σαφές ότι $a \in A$, οπότε το A δεν είναι κενό. Επίσης, είναι $A \subseteq [a,b]$, οπότε το A είναι άνω φραγμένο: το b είναι άνω φράγμα του A. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω

$$\xi = \sup A.$$

Επειδή $a \in A$, συνεπάγεται $a \leq \xi$. Επειδή το b είναι άνω φράγμα του A και το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται $\xi \leq b$. Άρα

$$a \leq \xi \leq b.$$

Επειδή $f(a) < \lambda$ και η f είναι συνεχής στο a, υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < \lambda$ για κάθε $x \in [a, a+\delta]$. Ειδικώτερα, είναι $f(a+\delta) < \lambda$. Άρα $a + \delta \in A$ και, επομένως, $a + \delta \leq \xi$. Άρα $a < \xi$. Ομοίως, επειδή $f(b) > \lambda$ και η f είναι συνεχής στο b, υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > \lambda$ για κάθε $x \in [b-\delta, b]$. Συνεπάγεται ότι κανένα $x \in [b-\delta, b]$ δεν ανήκει στο A, οπότε το $b - \delta$ είναι άνω φράγμα του A. Επειδή το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται $\xi \leq b - \delta$, οπότε $\xi < b$. Άρα

$$a < \xi < b.$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι $f(\xi) = \lambda$.

Έστω οποιοσδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει κάποιος δ ώστε

$$|x - \xi| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon. \tag{1}$$

Ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2, υπάρχει κάποιο $x_1 \in A$ ώστε $\xi - \delta < x_1 \leq \xi$. Από την (1) συνεπάγεται $|f(x_1) - f(\xi)| < \epsilon$, οπότε $f(\xi) < f(x_1) + \epsilon$. Επειδή $x_1 \in A$, συνεπάγεται $f(x_1) < \lambda$

και, επομένως, $f(\xi) < \lambda + \epsilon$. Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(\xi) - \lambda < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $f(\xi) - \lambda \leq 0$. Άρα

$$f(\xi) \leq \lambda.$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε x_2, $\xi < x_2 < \xi + \delta$. Ο ξ είναι άνω φράγμα του A,οπότε ο x_2 δεν ανήκει στο A. Δηλαδή, $f(x_2) \geq \lambda$. Από την (1) συνεπάγεται $|f(x_2) - f(\xi)| < \epsilon$, οπότε $f(\xi) > f(x_2) - \epsilon$. Άρα $f(\xi) > \lambda - \epsilon$. Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\lambda - f(\xi) < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\lambda - f(\xi) \leq 0$. Άρα

$$f(\xi) \geq \lambda.$$

Από τις $f(\xi) \leq \lambda$ και $f(\xi) \geq \lambda$ καταλήγουμε στην

$$f(\xi) = \lambda$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. ♮

Θεώρημα 5.2 ***Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης***. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{x \in [a, b] : \text{ η } f \text{ είναι φραγμένη στο } [a, x]\}.$$

Είναι προφανές ότι η f είναι φραγμένη στο διάστημα $[a, a]$, δηλαδή στο μονοσύνολο $\{a\}$. Επομένως, $a \in A$ και το A δεν είναι κενό. Επειδή $A \subseteq [a, b]$, το A είναι άνω φραγμένο: το b είναι άνω φράγμα του A. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω

$$\xi = \sup A.$$

Επειδή $a \in A$, συνεπάγεται $a \leq \xi$. Επειδή το b είναι άνω φράγμα του A και το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται $\xi \leq b$. Άρα

$$a \leq \xi \leq b.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο a, υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[a, a + \delta]$. Άρα $a + \delta \in A$ και, επομένως, $a + \delta \leq \xi$. Άρα

$$a < \xi \leq b.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\xi < b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[\xi - \delta, \xi + \delta]$. Επειδή το ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2, ότι υπάρχει κάποιο $x_1 \in A$ ώστε $\xi - \delta < x_1 \leq \xi$. Επειδή $x_1 \in A$, η f είναι φραγμένη στο $[a, x_1]$. Από το ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, x_1]$ και στο $[\xi - \delta, \xi + \delta]$, συνεπάγεται ότι η f είναι φραγμένη στην ένωση των δυο διαστημάτων, δηλαδή στο $[a, \xi + \delta]$. Άρα $\xi + \delta \in A$ και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι το ξ είναι άνω φράγμα του A.

Η υπόθεση $\xi < b$ μας οδήγησε σε άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι

$$\xi = b.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο b, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[b-\delta, b]$. Επειδή το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2, ότι υπάρχει κάποιο $x_1 \in A$ ώστε $b - \delta < x_1 \leq b$. Επειδή $x_1 \in A$, η f είναι φραγμένη στο $[a, x_1]$. Από το ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, x_1]$ και στο $[b - \delta, b]$, συνεπάγεται ότι η f είναι φραγμένη στην ένωση των δυο διαστημάτων, δηλαδή στο $[a, b]$. $\natural$

Θεώρημα 5.3 Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το

$$A = \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$ (Θεώρημα 5.2), οπότε υπάρχουν αριθμοί l, u ώστε να ισχύει $l \leq f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αυτό σημαίνει ότι ο l είναι κάτω φράγμα και ο u άνω φράγμα του A.

Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο, οπότε, σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω

$$M = \sup A.$$

Επειδή ο M είναι άνω φράγμα του A, ισχύει

$$f(x) \leq M$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός M δεν ανήκει στο A, δηλαδή ότι δεν είναι τιμή της f στο $[a, b]$. Επομένως, είναι $f(x) < M$ για κάθε $x \in [a, b]$ και ορίζεται η συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \qquad x \in [a, b].$$

Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχει $u > 0$ ώστε

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq u$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Συνεπάγεται

$$f(x) \leq M - \frac{1}{u}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Αυτό σημαίνει ότι ο $M - \frac{1}{u}$ είναι άνω φράγμα του A και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι ο M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

Η υπόθεση ότι ο M δεν είναι τιμή της f στο $[a,b]$ μας οδήγησε σε άτοπο, οπότε συμπεραίνουμε ότι ο M είναι τιμή της f στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi)=M$. Σε συνδυασμό με το ότι $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, καταλήγουμε στο ότι ο M είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[a,b]$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3: αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$.