

Ασκήσεις 2.

Λύστε τις ασκήσεις 1(e, f, g), 2 και 3 της ενότητας 3.2 και τις 1(c, d), 2(a, c), 3, 5 και 11 της ενότητας 7.2 του *Διανυσματικού Λογισμού* των Marsden - Tromba.

Λύστε και τις παρακάτω ασκήσεις από το *Calculus* του Apostol.

1. Μια μη αρνητική αύξουσα συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $[c, d] \subseteq [a, b]$ το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημά της και πάνω από το $[c, d]$ είναι ίσο με το μήκος του γραφήματός της πάνω από το $[c, d]$. Βρείτε την f .

2. Υπολογίστε το

$$\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy,$$

όπου C είναι η καμπύλη από το σημείο $(-2, 4)$ στο σημείο $(1, 1)$ πάνω στην παραβολή $y = x^2$.

3. Υπολογίστε το

$$\int_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2},$$

όπου C είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) με την θετική φορά διαγραφής.

4. Υπολογίστε το

$$\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|},$$

όπου C είναι το τετράγωνο με κορυφές $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ με την θετική φορά διαγραφής.

5. Υπολογίστε το

$$\int_C y dx + z dy + x dz,$$

όπου

(a) C είναι η τομή των επιφανειών $x + y = 2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. Η C διαγράφεται μια φορά στην κατεύθυνση περιστροφής των δεικτών του ρολογιού όταν την βλέπουμε από την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$.

(b) C είναι η τομή των επιφανειών $z = xy$ και $x^2 + y^2 = 1$. Η C διαγράφεται μια φορά στην αντίθετη κατεύθυνση περιστροφής των δεικτών του ρολογιού όταν την βλέπουμε από πολύ πάνω από το xy -επίπεδο.

6. Θεωρούμε το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\mathbf{k}$. Υπολογίστε το έργο που θα παραχθεί από αυτό το πεδίο όταν μετακινήσει ένα σωματίδιο από το σημείο $(0, 0, 0)$ στο σημείο $(1, 2, 4)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει αυτά τα σημεία.

7. Υπολογίστε το έργο που θα παραχθεί από το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{f}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ κατά μήκος της καμπύλης C η οποία είναι η τομή του ημισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ και του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = ax$, όπου $a > 0$. Η C διαγράφεται στην κατεύθυνση των δεικτών του ρολογιού όταν την βλέπουμε από πολύ πάνω από το xy -επίπεδο.