

Ασκήσεις 3.

Λύστε τις ασκήσεις 2(b, c) και 4 της ενότητας 7.1 και τις 15, 16 και 18 της ενότητας 7.2 του *Διανυσματικού Λογισμού* των Marsden - Tromba.

Λύστε και τις παρακάτω ασκήσεις από το *Calculus* του Apostol.

1. Υπολογίστε το

$$\int_C (x + y) ds,$$

όπου C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ με την θετική φορά περιστροφής.

2. Υπολογίστε το

$$\int_C z ds,$$

όπου η C έχει παραμετρική αναπαράσταση $\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $(0 \leq t \leq t_0)$.

3. Ποιά από τα παρακάτω ανοικτά υποσύνολα Ω του \mathbf{R}^2 είναι συνεκτικά; Για καθένα από τα Ω που είναι συνεκτικά, πάρτε δυο τυχαία σημεία του Ω και περιγράψτε καμπύλη με τροχιά μέσα στο Ω που να ενώνει τα δυο σημεία.

(a) $\Omega = \mathbf{R}^2$.

(b) $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$.

(c) $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 0\}$.

(d) $\Omega = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

(e) $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1 \text{ και } (x - 3)^2 + y^2 > 1\}$.

(f) $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1 \text{ ή } (x - 3)^2 + y^2 < 1\}$.

4. Αποδείξτε ότι καθένα από τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{f}(x, y) = (y, xy - x)$ στον \mathbf{R}^2 και $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy, x^2 + 1, z^2)$ στον \mathbf{R}^3 δεν είναι συντηρητικό, ελέγχοντας αν ικανοποιούν την γνωστή κατάλληλη αναγκαία συνθήκη.

5. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x - y)$ στον \mathbf{R}^2 ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη για να είναι συντηρητικό. Μπορείτε να αποδείξετε ότι το \mathbf{f} είναι συντηρητικό βρίσκοντας συγκεκριμένο πεδίο δυναμικού γι αυτό;

6. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$ στον \mathbf{R}^3 .

7. Αν τα αριθμητικά πεδία ϕ και ψ είναι πεδία δυναμικού για το ίδιο διανυσματικό πεδίο \mathbf{f} σε ένα ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, αποδείξτε ότι η αριθμητική συνάρτηση $\phi - \psi$ είναι σταθερή στο Ω .