ΛΥΣΕΙΣ 1.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

1. 3.1(3)(a) Είναι

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + 2\cos(2t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}''(t) = -\cos t\mathbf{i} - 4\sin(2t)\mathbf{j}$$

για κάθε t, οπότε

$$\mathbf{r}'(0) = 2\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}''(0) = -\mathbf{i}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathbf{r}(0)$ είναι

$$\mathbf{r}(0) + h\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + 2h\mathbf{j}, \qquad -\infty < h < +\infty.$$

(b) Είναι

$$\sigma'(t) = (\sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t, \sqrt{3}),$$
$$\sigma''(t) = (2\cos t - t\sin t, -2\sin t - t\cos t, 0)$$

για κάθε t, οπότε

$$\sigma'(0) = (0, 1, \sqrt{3}), \qquad \sigma''(0) = (2, 0, 0).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\sigma(0)$ είναι

$$\sigma(0) + h\sigma'(0) = (0, 0, 0) + h(0, 1, \sqrt{3}), \qquad -\infty < h < +\infty.$$

(c) Είναι

$$\mathbf{r}'(t) = \sqrt{2}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}''(t) = e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$$

για κάθε t, οπότε

$$\mathbf{r}'(0) = \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}''(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathbf{r}(0)$ είναι

$$\mathbf{r}(0) + h\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k} + h(\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}), \qquad -\infty < h < +\infty.$$

(d) Είναι

$$\sigma'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t^{\frac{1}{2}}\mathbf{k}, \quad \sigma''(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathbf{k}$$

για κάθε t, οπότε

$$\sigma'(9) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \qquad \sigma''(0) = \frac{1}{6}\mathbf{k}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\sigma(9)$ είναι

$$\sigma(9) + h\sigma'(9) = (9\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 18\mathbf{k}) + h(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}), \qquad -\infty < h < +\infty.$$

2. 3.1(7) Αν $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, τότε

$$x'(t) = t, \qquad y'(t) = e^t, \quad z'(t) = t^2$$

και

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -5, \quad z(0) = 1.$$

Με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$x(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y(t) = e^t - 6, \quad z(t) = \frac{t^3}{3} + 1$$

οπότε

$$\sigma(t) = \Big(\frac{t^2}{2}, e^t - 6, \frac{t^3}{3} + 1\Big)$$

για κάθε t.

3. 3.1(8) (a) $\mathbf{r}(x) = (x, e^x)$, $-\infty < x < +\infty$.

   (b) $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (c) $\mathbf{r}(t) = t(a, b, c) = (at, bt, ct)$, $-\infty < t < +\infty$.

   (d) $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{3}\cos t, \frac{1}{4}\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

4. 3.1(11) Είναι

$$\sigma'(t) = (2t, 3t^2 - 4, 0)$$

για κάθε $t \le 2$, οπότε

$$\sigma'(2) = (4, 8, 0).$$

Για $t \ge 2$ το σωματίδιο διαγράφει ευθεία κίνηση με σταθερή διανυσματική ταχύτητα ίση με $(4, 8, 0)$ ξεκινώντας από το σημείο $\sigma(2) = (4, 0, 0)$. Άρα η κίνησή του για $t \ge 2$ έχει παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(t) = (4, 0, 0) + (t - 2)(4, 8, 0), \qquad t \ge 2.$$

Άρα όταν $t = 3$ η θέση του σωματιδίου θα είναι

$$\mathbf{r}(3) = (8, 8, 0).$$

Οι ασκήσεις από το βιβλίο του Apostol.

1. Είναι

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}\mathbf{i} - \frac{4t}{(1 + t^2)^2}\mathbf{j},$$

οπότε

$$\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = \frac{4t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^3} - \frac{4t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^3} = 0$$

για κάθε $t \in \mathbf{R}$. Άρα η γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{f}(t)$ και $\mathbf{f}'(t)$ είναι σταθερή $\frac{\pi}{2}$.

2. Από το ότι $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{u} = t$ για κάθε $t \in I$ συνεπάγεται με παραγώγιση ότι

$$\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{u} = 1$$

για κάθε $t \in I$.

Η γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{f}'(t)$ είναι σταθερή, οπότε και το συνημίτονο της γωνίας είναι σταθερό. Άρα υπάρχει σταθερά $c \in [-1, 1]$ ώστε να ισχύει

$$\frac{\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{f}'(t)\| \|\mathbf{u}\|} = c$$

για κάθε $t \in I$.

Συνεπάγεται

$$\frac{1}{\|\mathbf{f}'(t)\| \|\mathbf{u}\|} = c$$

για κάθε $t \in I$, οπότε $c \neq 0$ και

$$\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = \|\mathbf{f}'(t)\|^2 = \frac{1}{c^2 \|\mathbf{u}\|^2}$$

για κάθε $t \in I$.

Παραγωγίζουμε:

$$\mathbf{f}''(t) \cdot \mathbf{f}'(t) + \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}''(t) = 0$$

οπότε

$$2\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}''(t) = 0$$

για κάθε $t \in I$.

Άρα τα $\mathbf{f}'(t)$ και $\mathbf{f}''(t)$ είναι κάθετα.

3. Είναι

$$\mathbf{g}' = \mathbf{f}' \times \mathbf{f}' + \mathbf{f} \times \mathbf{f}'' = \mathbf{0} + \mathbf{f} \times \mathbf{f}'' = \mathbf{f} \times \mathbf{f}''.$$

4. Είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{g}' &= \mathbf{f}' \cdot (\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'') + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'')' = \mathbf{0} + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{f}'' \times \mathbf{f}'' + \mathbf{f}' \times \mathbf{f}''') \\ &= \mathbf{f} \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{f}' \times \mathbf{f}''') = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''').\end{aligned}$$

5. (i) Έστω

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)), \qquad t \in I.$$

Τότε

$$({f_1}'(t), \ldots, {f_n}'(t)) = \mathbf{f}'(t) = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$$

για κάθε $t \in I$, οπότε

$${f_k}'(t) = 0$$

για κάθε $t \in I$ και κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Άρα υπάρχουν σταθερές $u_k \in \mathbf{R}$ ώστε

$$f_k(t) = u_k$$

για κάθε $t \in I$ και κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Αν ορίσουμε $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$, τότε

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) = (u_1, \ldots, u_k) = \mathbf{u}$$

για κάθε $t \in I$.

(ii) Είναι

$$\Big(\mathbf{f}'(t) - \frac{t^2}{2}\mathbf{u} - t\mathbf{v}\Big)' = \mathbf{f}''(t) - t\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

για κάθε $t \in I$. Από το (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ ώστε

$$\mathbf{f}'(t) - \frac{t^2}{2}\mathbf{u} - t\mathbf{v} = \mathbf{c}$$

για κάθε $t \in I$. Με $t = 0$ βρίσκουμε $\mathbf{c} = \mathbf{B}$, οπότε

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{u} + t\mathbf{v} + \mathbf{B}$$

για κάθε $t \in I$.

Τώρα

$$\Big(\mathbf{f}(t) - \frac{t^3}{6}\mathbf{u} - \frac{t^2}{2}\mathbf{v} - t\mathbf{B}\Big)' = \mathbf{f}'(t) - \frac{t^2}{2}\mathbf{u} - t\mathbf{v} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

για κάθε $t \in I$. Από το (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ ώστε

$$\mathbf{f}(t) - \frac{t^3}{6}\mathbf{u} - \frac{t^2}{2}\mathbf{v} - t\mathbf{B} = \mathbf{d}$$

για κάθε $t \in I$. Με $t = 0$ βρίσκουμε $\mathbf{d} = \mathbf{A}$, οπότε

$$\mathbf{f}(t) = \frac{t^3}{6}\mathbf{u} + \frac{t^2}{2}\mathbf{v} + t\mathbf{B} + \mathbf{A}$$

για κάθε $t \in I$.

6. Είναι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t)) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t)) = \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t).$$

7. Επειδή τα $\mathbf{f}(t)$ και $\mathbf{f}'(t)$ είναι παράλληλα για κάθε $t \in I$, υπάρχει συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ ώστε

$$\mathbf{f}'(t) = g(t)\mathbf{f}(t)$$

για κάθε $t \in I$.

Συνεπάγεται

$$\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = g(t)\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = g(t)\|\mathbf{f}(t)\|^2$$

οπότε

$$g(t) = \frac{\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t)}{\|\mathbf{f}(t)\|^2}$$

για κάθε $t \in I$. Άρα η g είναι συνεχής στο I.

Θεωρούμε οποιαδήποτε αντιπαράγωγο $\int g(t)\,dt$ της g στο I και ορίζουμε την $h : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$h(t) = e^{\int g(t)\,dt}, \qquad t \in I.$$

Προφανώς

$$h(t) > 0$$

για κάθε $t \in I$ και

$$\left(\frac{1}{h(t)}\mathbf{f}(t)\right)' = -\frac{h'(t)}{h(t)^2}\mathbf{f}(t) + \frac{1}{h(t)}\mathbf{f}'(t) = -\frac{g(t)}{h(t)}\mathbf{f}(t) + \frac{1}{h(t)}g(t)\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$$

για κάθε $t \in I$.

Άρα υπάρχει $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ώστε

$$\frac{1}{h(t)}\mathbf{f}(t) = \mathbf{u}$$

και, επομένως,

$$\mathbf{f}(t) = h(t)\mathbf{u}$$

για κάθε $t \in I$.

8. Είναι σαφές ότι για κάθε $t \in [a, b]$ το σημείο $\mathbf{r}(t)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

$$s\mathbf{A} + \mathbf{B}, \qquad -\infty < s < +\infty.$$

Είναι

$$\mathbf{v}(t) = f'(t)\mathbf{A}, \qquad \mathbf{a}(t) = f''(t)\mathbf{A}.$$

Άρα τα $\mathbf{v}(t)$ και $\mathbf{a}(t)$ είναι πολλαπλάσια του ίδιου $\mathbf{A}$, οπότε είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου.

9. Είναι

$$(r\cos(\omega t))^2 + (r\sin(\omega t))^2 = r^2\,,$$

οπότε η τροχιά της καμπύλης C βρίσκεται πάνω στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2$.

Επίσης,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\omega r\sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega r\cos(\omega t)\mathbf{j}$$

και
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t)\mathbf{i} - \omega^2 r\sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}(t)$$
για κάθε $t \in [a, b]$.

10. Είναι
$$\frac{(\kappa\cos(\omega t))^2}{\kappa^2} + \frac{(\lambda\sin(\omega t))^2}{\lambda^2} = 1,$$
οπότε η τροχιά της καμπύλης C βρίσκεται πάνω στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$.
Επίσης,
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\omega\kappa\sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega\lambda\cos(\omega t)\mathbf{j}$$
και
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\omega^2\kappa\cos(\omega t)\mathbf{i} - \omega^2\lambda\sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}(t)$$
για κάθε $t \in [a, b]$.

11. Είναι
$$\frac{(\kappa\cosh(\omega t))^2}{\kappa^2} - \frac{(\lambda\sinh(\omega t))^2}{\lambda^2} = 1,$$
και
$$\kappa\cosh(\omega t) > 0$$
οπότε η τροχιά της καμπύλης C βρίσκεται πάνω στον δεξιό κλάδο της υπερβολής με εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2} - \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$.
Επίσης,
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \omega\kappa\sinh(\omega t)\mathbf{i} + \omega\lambda\cosh(\omega t)\mathbf{j}$$
και
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \omega^2\kappa\cosh(\omega t)\mathbf{i} + \omega^2\lambda\sinh(\omega t)\mathbf{j} = \omega^2\mathbf{r}(t)$$
για κάθε $t \in [a, b]$.

12. (i) Σε κάθε σημείο $\mathbf{r}(t)$ η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στο
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\omega r\sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega r\cos(\omega t)\mathbf{j} + \kappa\omega\mathbf{k},$$
οπότε η γωνία της με τον z-άξονα είναι ίδια με την γωνία ανάμεσα στα $\mathbf{v}(t)$ και $\mathbf{k}$. Το συνημίτονο της γωνίας αυτής είναι ίσο με
$$\frac{\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{v}(t)\|\|\mathbf{k}\|} = \frac{\kappa\omega}{\omega\sqrt{r^2+\kappa^2}} = \frac{\kappa}{\sqrt{r^2+\kappa^2}}\,.$$
(ii) Είναι
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t)\mathbf{i} - \omega^2 r\sin(\omega t)\mathbf{j},$$
οπότε
$$\|\mathbf{v}(t)\| = \omega\sqrt{r^2+\kappa^2}\,, \qquad \|\mathbf{a}(t)\| = \omega^2 r.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t)\times\mathbf{a}(t) &= \omega^3 r\big(r\sin(\omega t)\mathbf{i} - r\cos(\omega t)\mathbf{j} - \kappa\mathbf{k}\big)\times\big(\cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}\big)\\
&= \omega^3 r\big(r\sin(\omega t)\cos(\omega t)\mathbf{i}\times\mathbf{i} + r\sin^2(\omega t)\mathbf{i}\times\mathbf{j} - r\cos^2(\omega t)\mathbf{j}\times\mathbf{i}\\
&\quad -r\cos(\omega t)\sin(\omega t)\mathbf{j}\times\mathbf{j} - \kappa\cos(\omega t)\mathbf{k}\times\mathbf{i} - \kappa\sin(\omega t)\mathbf{k}\times\mathbf{j}\big)\\
&= \omega^3 r\big(r\sin^2(\omega t)\mathbf{k} + r\cos^2(\omega t)\mathbf{k} - \kappa\cos(\omega t)\mathbf{j} + \kappa\sin(\omega t)\mathbf{i}\big)\\
&= \omega^3 r\big(\kappa\sin(\omega t)\mathbf{i} - \kappa\cos(\omega t)\mathbf{j} + r\mathbf{k}\big).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\|\mathbf{v}(t)\times\mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\omega^3 r\sqrt{r^2+\kappa^2}}{\omega^3\sqrt{r^2+\kappa^2}(r^2+\kappa^2)} = \frac{r}{r^2+\kappa^2}$$

για κάθε $t\in[a,b]$.

(iii) Από τον προηγούμενο υπολογισμό,

$$\mathbf{v}(t)\times\mathbf{a}(t) = \omega^3 r\kappa\mathbf{u}(t) + \omega^3 r^2\mathbf{k}$$

οπότε $A=\omega^3 r\kappa$ και $B=\omega^3 r^2$.

13. Το να βρίσκεται ένα σύνολο σημείων - για παράδειγμα η τροχιά μιας καμπύλης - του $\mathbf{R}^3$ πάνω σε κάποιο επίπεδο σημαίνει ότι υπάρχουν αριθμοί a,b,c,d με $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ ώστε να ισχύει $ax+by+cz=d$ για κάθε (x,y,z) που ανήκει στο εν λόγω σύνολο. Αυτό μπορεί να γραφτεί και στην μορφή $(a,b,c)\cdot(x,y,z)=d$, οπότε μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι υπάρχει $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^3$, $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$ και αριθμός d ώστε να ισχύει $\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}=d$ για κάθε $\mathbf{u}$ στο σύνολο.

(i) Έστω $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbf{R}^3$ η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης C. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=\mathbf{k}$$

για κάθε $t\in[a,b]$.

Συνεπάγεται

$$(\mathbf{r}(t)-t\mathbf{k})' = \mathbf{r}'(t)-\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

για κάθε $t\in[a,b]$, οπότε υπάρχει $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^3$ ώστε

$$\mathbf{r}(t)-t\mathbf{k}=\mathbf{A}$$

και επομένως

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{k}+\mathbf{A}$$

για κάθε $t\in[a,b]$.

Τώρα μπορούμε να βρούμε ένα $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^3$, $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}=0,$$

οπότε θα ισχύει

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}(t) = t\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Άρα η τροχιά της C βρίσκεται στο επίπεδο που καθορίζεται από το $\mathbf{p}$ και από το $d = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$.

(ii) Αυτό δεν είναι πάντα σωστό. Ας θεωρήσουμε την έλικα με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Είναι

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

οπότε

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{r^2 + 1}$$

για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

Αν η τροχιά της έλικας βρισκόταν πάνω σε ένα επίπεδο, θα υπήρχαν $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ και αριθμός d ώστε να ισχύει

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}(t) = d$$

για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

Παραγωγίζουμε δυο φορές, οπότε

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(t) = 0$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}(t) = 0$$

για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Από την δεύτερη ισότητα με $t = 0$ και $t = \frac{\pi}{2}$ βρίσκουμε $\mathbf{p} \cdot \mathbf{i} = 0$ και $\mathbf{p} \cdot \mathbf{j} = 0$. Άρα $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{k}$ για κάποιο $\lambda \neq 0$. Από την $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ συνεπάγεται

$$\lambda = 0,$$

δηλαδή άτοπο.

(iii) Έστω $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης C. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{k}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Συνεπάγεται

$$(\mathbf{r}'(t) - t\mathbf{k})' = \mathbf{r}''(t) - \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

για κάθε $t \in [a, b]$, οπότε υπάρχει $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^3$ ώστε

$$\mathbf{r}'(t) - t\mathbf{k} = \mathbf{A}$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Συνεπάγεται

$$\left(\mathbf{r}(t) - \frac{t^2}{2}\mathbf{k} - t\mathbf{A}\right)' = \mathbf{r}'(t) - t\mathbf{k} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

για κάθε $t \in [a,b]$, οπότε υπάρχει $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^3$ ώστε

$$\mathbf{r}(t) - \frac{t^2}{2}\mathbf{k} - t\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

και επομένως

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{k} + t\mathbf{A} + \mathbf{B}$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Τώρα μπορούμε να βρούμε ένα $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = 0$$

οπότε θα ισχύει

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + t\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{B}$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Άρα η τροχιά της C βρίσκεται στο επίπεδο που καθορίζεται από το $\mathbf{p}$ και από το $d = \mathbf{p} \cdot \mathbf{B}$.

(iv) Θεωρούμε πάλι την έλικα του (ii). Αποδείξαμε ότι η τροχιά της έλικας δεν βρίσκεται σε ένα επίπεδο. Όμως

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$$

οπότε

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0$$

για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

14. (i) Είναι

$$(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t))' = \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$$

για κάθε $t \in [a,b]$, οπότε υπάρχει σταθερό $\mathbf{c}$ ώστε

$$\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{c}$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

(ii) Έστω $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Τότε

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$$

για κάθε $t \in [a,b]$, οπότε η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε επίπεδο. (Δείτε την αρχή της λύσης της άσκησης 13.)

Έστω $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Τότε, επειδή $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, από την $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι τα $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{v}(t)$ είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου. Από την άσκηση 7 συνεπάγεται ότι η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε μια ημιευθεία, οπότε βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο.

(iii) Άμεση συνέπεια των (i) και (ii).

15. (i) Είναι $x'(t) = -y(t)$. Άρα, αν $y(t) > 0$, τότε το $x(t)$ ελλαττώνεται και, αν $y(t) < 0$, τότε το $x(t)$ αυξάνεται. Άρα το $\mathbf{r}(t)$ κινείται πάνω στην έλλειψη με την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού.

(ii). Από την $3x^2(t) + y^2(t) = 1$ με παραγώγιση βρίσκουμε

$$3x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0,$$

οπότε

$$y(t)(-3x(t) + y'(t)) = 0$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Αν $y(t) \neq 0$, τότε

$$y'(t) = 3x(t).$$

Λόγω συνέχειας, η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $x \in [a,b]$.

(iii) Έστω ότι $\mathbf{r}(0) = (1,0)$, δηλαδή $x(0) = 1$ και $y(0) = 0$.

Θεωρούμε την

$$f(t) = 3\big(x(t) - \cos(\sqrt{3}t)\big)^2 + \big(y(t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\big)^2$$

και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f'(t) = 6\big(x(t) - \cos(\sqrt{3}t)\big)\big(-y(t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\big) \\ +2\big(y(t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\big)\big(3x(t) - 3\cos(\sqrt{3}t)\big) = 0. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει αριθμός c ώστε $f(t) = c$ για κάθε $t \in [a,b]$ και από τις $x(0) = 1$ και $y(0) = 0$ βρίσκουμε ότι $c = f(0) = 0$. Άρα

$$x(t) = \cos(\sqrt{3}t), \qquad y(t) = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Είναι σαφές ότι χρειάζεται χρόνος $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ για να ολοκληρωθεί μια περιστροφή της έλλειψης.

16. Έστω $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ για κάθε $t \in [a, b]$.

Το ότι η τροχιά της C βρίσκεται μέσα στο πρώτο τεταρτημόριο του $\mathbf{R}^2$ σημαίνει ότι

$$x(t) > 0, \qquad y(t) > 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Το ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο $\mathbf{r}(t)$ έχει αρνητική κλίση και το ότι $\phi(t)$ είναι η γωνία ανάμεσα στο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}(t)$ και στον x-άξονα σημαίνει ότι

$$\tan\phi(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} < 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Τέλος, το ότι $\theta(t)$ είναι η γωνία ανάμεσα στο $\mathbf{r}(t)$ και στον x-άξονα σημαίνει ότι

$$\tan\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Από την $3\tan\phi(t) = 4\cot\theta(t)$ συνεπάγεται

$$3\frac{y'(t)}{x'(t)} = 4\frac{x(t)}{y(t)}$$

ή ισοδύναμα

$$4x(t)x'(t) - 3y(t)y'(t) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\left(4x^2(t) - 3y^2(t)\right)' = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε

$$4x^2(t) - 3y^2(t) = c$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Για κάποια τιμή του t ισχύει $x(t) = \frac{3}{2}$, $y(t) = 1$. Άρα

$$4x^2(t) - 3y^2(t) = 6$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Άρα η εξίσωση της τροχιάς της C είναι

$$4x^2 - 3y^2 = 6, \quad x, y > 0.$$

17. (i) Είναι

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{r}'(t)$$

οπότε

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{r}'(t)) \cdot \mathbf{A} = 0$$

και επομένως η διανυσματική επιτάχυνση είναι κάθετη στο $\mathbf{A}$ για κάθε $t \in [a, b]$.

(ii) Είναι

$$\frac{d}{dt}v^2(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 2\mathbf{v}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 2\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 2(\mathbf{A}\times\mathbf{r}'(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε

$$v(t) = c$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Τώρα

$$c = v(0) = \|\mathbf{v}(0)\| = \|\mathbf{r}'(0)\| = \|\mathbf{A} \times \mathbf{r}(0)\| = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \sin\theta.$$

(iii) Είναι

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{r}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Άρα υπάρχει σταθερά κ ώστε

$$\|\mathbf{r}(t)\| = \kappa$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Με $t = 0$ βρίσκουμε

$$\|\mathbf{r}(t)\| = \|\mathbf{B}\|$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Επίσης, είναι

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{A} = 0$$

οπότε

$$(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{A})' = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Άρα υπάρχει σταθερά λ ώστε

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{A} = \lambda$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Με $t = 0$ βρίσκουμε

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

οπότε

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Θεωρούμε την προβολή του $\mathbf{B}$ στο $\mathbf{A}$, δηλαδή το

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|^2} \mathbf{A}.$$

Τότε

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} + (\mathbf{B} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{C} = 0 + 0 = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Επομένως

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\|^2 + \|\mathbf{C}\|^2 = \|(\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}) + \mathbf{C}\|^2 = \|\mathbf{r}(t)\|^2 = \|\mathbf{B}\|^2$$

οπότε

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\|^2 = \|\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{C}\|^2 = \|\mathbf{B}\|^2 \sin^2 \theta$$

οπότε

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\| = \|\mathbf{B}\| \sin \theta$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Επειδή $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}) + \mathbf{C}$, συνεπάγεται ότι η τροχιά της C βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο $\mathbf{C}$ ο οποίος περιέχεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\mathbf{A}$ στο σημείο $\mathbf{C}$ και ο οποίος διέρχεται από το σημείο $\mathbf{B}$.