

ΛΥΣΕΙΣ 2.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

1. 3.2(1)(e) Είναι $\sigma'(t) = (\sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t, \sqrt{3})$ οπότε

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(\sin t + t \cos t)^2 + (\cos t - t \sin t)^2 + 3} = \sqrt{t^2 + 4}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt &= \int_0^1 \sqrt{t^2 + 4} dt = \left(\frac{t}{2} \sqrt{t^2 + 4} + 2 \log(t + \sqrt{t^2 + 4}) \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

- (f) Είναι $\mathbf{r}'(t) = \sqrt{2}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$ οπότε

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}} = e^t + e^{-t}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\int_{-1}^1 \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{-1}^1 (e^t + e^{-t}) dt = (e^t - e^{-t}) \Big|_{-1}^1 = 2e - 2e^{-1}.$$

- (g) Είναι $\sigma'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t^{\frac{1}{2}}\mathbf{k}$ οπότε

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1 + 1 + t} = \sqrt{t + 2}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\sigma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{t + 2} dt = \left(\frac{2}{3}(t+2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{2}{3}(t_1+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(t_0+2)^{\frac{3}{2}}.$$

2. 3.2(2) Είναι $\alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ οπότε

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t + e^{-t}).$$

Η συνάρτηση μήκους είναι

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t (e^\tau + e^{-\tau}) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t - e^{-t}).$$

Ομοίως, είναι $\beta'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ οπότε

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{2}.$$

Η συνάρτηση μήκους είναι

$$s(t) = \int_0^t \|\beta'(\tau)\| d\tau = \sqrt{2} \int_0^t 1 d\tau = \sqrt{2}t.$$

3. 3.2(3) Είναι $\sigma'(t) = (2, 2t, \frac{1}{t})$ οπότε

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = 2t + \frac{1}{t}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\int_1^2 \|\sigma'(t)\| dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = \left(t^2 + \log t\right)\Big|_1^2 = 3 + \log 2.$$

4. 7.2(1)(c)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t) \cdot (\cos t, 0, -\sin t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.$$

(d)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\sigma = \int_{-1}^2 (t^2, 3t, 2t^3) \cdot (2t, 3, 6t^2) dt = \int_{-1}^2 (2t^3 + 9t + 12t^5) dt = 147.$$

5. 7.2(2)(a)

$$\int_{\sigma} x dy - y dx = \int_0^{2\pi} (\cos t \cos t - \sin t(-\sin t)) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(c) Παραμετρική αναπαράσταση: $\sigma(x) = (x, 0, x^2)$ ($-1 \leq x \leq 1$).

$$\int_{\sigma} yz dx + xz dy + xy dz = \int_{-1}^1 (0x^2 + x^2 \cdot 0 + x \cdot 0 \cdot 2x) dx = \int_{-1}^1 0 dx = 0.$$

6. 7.2(3) Παραμετρική αναπαράσταση: $\mathbf{r}(x) = (x, x^2, 0)$ ($-1 \leq x \leq 2$).

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^2 (x + x^2 \cdot 2x + 0 \cdot 0) dx = \int_{-1}^2 (x + 2x^3) dx = 9.$$

7. 7.2(5) Αν $\mathbf{s} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ είναι η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης, τότε

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{s}'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\mathbf{s}(t))\| \|\mathbf{s}'(t)\| dt \leq \int_a^b M \|\mathbf{s}'(t)\| dt \\ &= M \int_a^b \|\mathbf{s}'(t)\| dt = Ml. \end{aligned}$$

8. 7.2(11) Αν $\mathbf{s} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ είναι η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το $\mathbf{s}'(t)$ οπότε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{s}'(t)}{\|\mathbf{s}'(t)\|}$. Άρα

$$\int_{\sigma} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{\mathbf{s}'(t)}{\|\mathbf{s}'(t)\|} \cdot \mathbf{s}'(t) dt = \int_a^b \|\mathbf{s}'(t)\| dt = L,$$

δηλαδή το μήκος της καμπύλης.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο του Apostol.

1. Μια παραμετρική αναπαράσταση του γραφήματος της f είναι η

$$\mathbf{r}(x) = (x, f(x)), \quad x \in [a, b].$$

Τότε

$$\mathbf{r}'(x) = (1, f'(x))$$

οπότε το μήκος του γραφήματος πάνω από το $[c, d]$ είναι ίσο με

$$\int_c^d \|\mathbf{r}'(x)\| dx = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημα και πάνω από το $[c, d]$ είναι ίσο με

$$\int_c^d f(x) dx.$$

Η υπόθεση είναι ότι

$$\int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_c^d f(x) dx$$

για κάθε $[c, d] \subseteq [a, b]$.

Συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει

$$\int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^x f(t) dt.$$

Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = f(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Επειδή η f είναι αύξουσα, συνεπάγεται $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - 1}} = 1$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Συνεπάγεται

$$\frac{d}{dx} \log(f(x) + \sqrt{f^2(x) - 1}) = 1$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά c ώστε

$$\log(f(x) + \sqrt{f^2(x) - 1}) = x + c$$

και επομένως

$$f(x) + \sqrt{f^2(x) - 1} = e^{x+c}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Συνεπάγεται

$$f(x) = \sinh(x + c)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Η σταθερά c προσδιορίζεται από την ισότητα (με $x = a$)

$$f(a) = \sinh(a + c).$$

2. Η C έχει παραμετρική αναπαράσταση την

$$\mathbf{r}(x) = (x, x^2) \quad (-2 \leq x \leq 1).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-2}^1 ((x^2 - 2xx^2)1 + (x^4 - 2xx^2)2x)dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = -\frac{369}{10}. \end{aligned}$$

3. Η C έχει παραμετρική αναπαράσταση την

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos t + a \sin t)(-a \sin t) - (a \cos t - a \sin t)(a \cos t)}{a^2} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi. \end{aligned}$$

4. Η C είναι άθροισμα $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, όπου C_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, 0)$ μέχρι το $(0, 1)$, C_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 1)$ μέχρι το $(-1, 0)$, C_3 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(-1, 0)$ μέχρι το $(0, -1)$ και C_4 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, -1)$ μέχρι το $(1, 0)$. Επομένως,

$$\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_{C_1} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{C_2} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{C_3} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{C_4} \frac{dx + dy}{|x| + |y|},$$

οπότε πρέπει να υπολογίσουμε καθένα από τα τέσσερα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Η παραμετρική αναπαράσταση της C_1 είναι η $r_1(t) = (1-t, t)$ ($t \in [0, 1]$).
Άρα

$$\int_{C_1} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{-1+1}{1} dt = 0.$$

Η παραμετρική αναπαράσταση της C_2 είναι η $r_2(t) = (-t, 1-t)$ ($t \in [0, 1]$).
Άρα

$$\int_{C_2} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{-1-1}{1} dt = -2.$$

Η παραμετρική αναπαράσταση της C_3 είναι η $r_3(t) = (t-1, -t)$ ($t \in [0, 1]$).
Άρα

$$\int_{C_3} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{1-1}{1} dt = 0.$$

Η παραμετρική αναπαράσταση της C_4 είναι η $r_4(t) = (t, t-1)$ ($t \in [0, 1]$).
Άρα

$$\int_{C_4} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{1+1}{1} dt = 2.$$

Άρα

$$\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0.$$

5. (α) Αν θέσουμε

$$x' = x - 1, \quad y' = y - 1, \quad z' = z,$$

τότε οι δυο σχέσεις που περιγράφουν την C γράφονται ισοδύναμα

$$x' + y' = 0, \quad (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 2.$$

Δηλαδή το σημείο (x', y', z') κινείται πάνω στο επίπεδο με εξίσωση $x' + y' = 0$ και η απόστασή του από το $(0, 0, 0)$ είναι σταθερή $\sqrt{2}$. Επομένως το ίδιο σημείο περιγράφει έναν κύκλο C_0 πάνω στο ίδιο επίπεδο με κέντρο το $(0, 0, 0)$ (που κι αυτό είναι πάνω στο ίδιο επίπεδο) και ακτίνα $\sqrt{2}$. Τώρα,

$$(x, y, z) = (x', y', z') + (1, 1, 0)$$

και

$$(x', y', z') \cdot (1, 1, 0) = 0.$$

Άρα η καμπύλη C την οποία περιγράφει το σημείο (x, y, z) είναι μια απλή μεταφορά του προηγούμενου κύκλου C_0 κατά το διάνυσμα $(1, 1, 0)$. Κατά την περιστροφή του το (x', y', z') περνάει από το ανώτατο σημείο $(0, 0, \sqrt{2})$

του κύκλου C_0 και μετά 'πέφτει' στο σημείο $(1, -1, 0)$ πάνω στο xy -επίπεδο. Άρα μια παραμετρική αναπαράσταση του C_0 είναι η

$$\begin{aligned}(x'(t), y'(t), z'(t)) &= \cos t(0, 0, \sqrt{2}) + \sin t(1, -1, 0) \\ &= (\sin t, -\sin t, \sqrt{2} \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

και επομένως μια παραμετρική αναπαράσταση της C είναι η

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\sin t + 1, -\sin t + 1, \sqrt{2} \cos t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_C y dx + z dy + x dz &= \int_0^{2\pi} ((-\sin t + 1) \cos t + \sqrt{2} \cos t (-\cos t) \\ &\quad + (\sin t + 1)(-\sqrt{2} \sin t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} - \sin t \cos t + \cos t - \sqrt{2} \sin t) dt \\ &= -2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

(b) Είναι σαφές ότι το σημείο $(x, y, 0)$ διαγράφει πάνω στο xy -επίπεδο τον κύκλο με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 1 με την θετική φορά περιστροφής. Άρα η παραμετρική αναπαράσταση της C είναι

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, \cos t \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_C y dx + z dy + x dz &= \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t \\ &\quad + \cos t(-\sin t \sin t + \cos t \cos t)) dt \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

6. Το ευθύγραμμο τμήμα C έχει παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t, 4t) \quad t \in [0, 1].$$

Άρα το έργο είναι ίσο με

$$\int_C \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t1 + 2t2 + (t4t - 2t)4) dt = \frac{23}{6}.$$

7. Η C περιγράφεται ισοδύναμα από τις σχέσεις

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Άρα μια παραμετρική αναπαράσταση της C είναι

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{a}{2} \cos t + \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \sin t, \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t} \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Άρα το έργο είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{4} \sin^2 t \left(-\frac{a}{2} \sin t \right) + \frac{a^2}{2} (1 - \cos t) \left(-\frac{a}{2} \cos t \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{4} (\cos t + 1)^2 \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\sin t}{2\sqrt{1 - \cos t}} \right) dt \\ &= \frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$