ΛΥΣΕΙΣ 2.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

1. 7.1.(2)(*b*) $\sigma'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$, οπότε $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$ και

$$\int_\sigma f(x,y,z)\,ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0.$$

(*c*) $\sigma'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, οπότε $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$ και

$$\int_\sigma f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 t\cos 0\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{u}\,du = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}\,.$$

2. 7.1.(4) Η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης C είναι

$$\mathbf{r}(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) \qquad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2).$$

Τότε

$$\mathbf{r}'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta),$$

οπότε $\|\mathbf{r}'(\theta)\| = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}$ και

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta.$$

3. 7.2(15) Επειδή δεν μας λένε ποια ακριβώς είναι η συγκεκριμένη καμπύλη, αλλά μας λένε μόνο τα άκρα της, υποψιαζόμαστε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Με άλλα λόγια υποψιαζόμαστε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

είναι συντηρητικό. Ένας επιπλέον λόγος είναι ότι το $\mathbf{f}$ ικανοποιεί την γνωστή αναγκαία συνθήκη για να προέρχεται από πεδίο δυναμικού, δηλαδή τις σχέσεις

$$\frac{\partial(2xyz)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2z)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial(2xyz)}{\partial z} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial(x^2z)}{\partial z} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να προέρχεται από πεδίο δυναμικού. Αν καταφέρουμε να βρούμε μια αριθμητική συνάρτηση $\phi(x,y,z)$ έτσι ώστε $\nabla\phi(x,y,z) = \mathbf{f}(x,y,z)$, δηλαδή (ισοδύναμα)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = x^2z, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = x^2y,$$

τότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος θα είναι στοιχειώδης.

Μπορούμε με λίγη σκέψη να μαντέψουμε την συνάρτηση

$$\phi(x, y, z) = x^2 yz$$

η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω ισότητες.

Ένας *μεθοδικός* τρόπος να βρούμε μια ϕ είναι ο εξής. Θεωρώντας τα y, z σταθερά, ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x για να απαλείψουμε την παράγωγο ως προς την μεταβλητή x και βρίσκουμε

$$\phi(x, y, z) = \int 2xyz\, dx = 2yz \int x\, dx = x^2 yz + c.$$

Αυτή η ισότητα δεν είναι ακριβώς σωστή διότι πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι η σταθερά ολοκλήρωσης c δεν εξαρτάται από την μεταβλητή x της ολοκλήρωσης, μπορεί, όμως, να εξαρτάται από τις άλλες δυο μεταβλητές y, z τις οποίες θεωρήσαμε προσωρινά σταθερές. Άρα το σωστό είναι να γράψουμε

$$\phi(x, y, z) = \int 2xyz\, dx = x^2 yz + \psi(y, z),$$

όπου $\psi(y, z)$ είναι συνάρτηση μόνο των y, z. Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$x^2 z + \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = x^2 z$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = 0.$$

Τώρα ολοκληρώνουμε ως προς y για να απαλείψουμε την παράγωγο ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y, z) = \int 0\, dy = \chi(z),$$

όπου και πάλι, αντί να κάνουμε το λάθος να γράψουμε $\int 0\, dy = c$, γράφουμε την σταθερά (ως προς y) ως συνάρτηση της μεταβλητής z. Τώρα, αφού σκεφτούμε ότι

$$\phi(x, y, z) = x^2 yz + \psi(y, z) = x^2 yz + \chi(z),$$

η τρίτη ισότητα γράφεται

$$x^2 y + \chi'(z) = x^2 y$$

ή, ισοδύναμα,

$$\chi'(z) = 0.$$

Άρα η $\chi(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση: $\chi(z) = c$. Επομένως

$$\phi(x, y, z) = x^2 yz + c$$

είναι τα πεδία δυναμικού από τα οποία προέρχεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$. Η σταθερά c είναι αυθαίρετη και επιλέγουμε

$$\phi(x,y,z) = x^2yz.$$

Τώρα

$$\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz = \phi(1,2,4) - \phi(1,1,1) = 7.$$

4. *Πρώτος τρόπος.* Βρίσκουμε την αριθμητική συνάρτηση $f(x,y,z)$ ώστε να ικανοποιεί τις ισότητες

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyze^{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ze^{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = ye^{x^2}.$$

Ακολουθούμε την μέθοδο που περιγράφτηκε στην προηγούμενη άσκηση.

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$f(x,y,z) = \int 2xyze^{x^2}\,dx = yze^{x^2} + g(y,z).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$ze^{x^2} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = ze^{x^2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$g(y,z) = \int 0\,dy = h(z),$$

οπότε

$$f(x,y,z) = yze^{x^2} + g(y,z) = yze^{x^2} + h(z).$$

Τέλος, η τρίτη ισότητα γράφεται

$$ye^{x^2} + h'(z) = ye^{x^2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$h'(z) = 0,$$

οπότε η $h(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$f(x,y,z) = yze^{x^2} + h(z) = yze^{x^2} + c.$$

Βρίσκουμε την c από την

$$5 = f(0,0,0) = 0 \cdot 0 \cdot e^{0^2} + c = c.$$

Άρα

$$f(1,1,2) = 1 \cdot 2 \cdot e^{1^2} + 5 = 2e + 5.$$

Δεύτερος τρόπος. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε καμπύλη με αρχή το σημείο $(0,0,0)$ και τέλος το σημείο $(1,1,2)$. Η απλούστερη τέτοια καμπύλη είναι το ευθύγραμμο τμήμα C που ενώνει τα δυο σημεία με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(t) = (t,t,2t) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Τώρα είναι

$$\begin{aligned} f(1,1,2) - f(0,0,0) &= \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_C 2xyze^{x^2}\,dx + ze^{x^2}\,dy + ye^{x^2}\,dz \\ &= \int_0^1 \left(2tt2te^{t^2}1 + 2te^{t^2}1 + te^{t^2}2\right) dt \\ &= \int_0^1 (4t^3 + 4t)e^{t^2}\,dt = 2\int_0^1 (u+1)e^u\,du = 2e. \end{aligned}$$

Άρα

$$f(1,1,2) = 2e + f(0,0,0) = 2e + 5.$$

5. Ελέγχουμε αν το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$$

ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη για να προέρχεται από πεδίο δυναμικού, δηλαδή τις σχέσεις

$$\frac{\partial(z^2)}{\partial y} = \frac{\partial(3y^2)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = \frac{\partial(2xz)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial(3y^2)}{\partial z} = \frac{\partial(2xz)}{\partial y}\,.$$

Αυτές είναι σωστές, οπότε βρίσκουμε πεδίο δυναμικού $\phi(x,y,z)$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = z^2\,, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2\,, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = 2xz,$$

εφαρμόζοντας την μέθοδο των δυο προηγούμενων ασκήσεων.

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$\phi(x,y,z) = \int z^2\,dx = xz^2 + \psi(y,z).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(y,z) = 3y^2\,.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y,z) = \int 3y^2\,dy = y^3 + \chi(z),$$

οπότε

$$\phi(x,y,z) = xz^2 + \psi(y,z) = xz^2 + y^3 + \chi(z).$$

Τέλος, η τρίτη ισότητα γράφεται

$$2xz + \chi'(z) = 2xz$$

ή, ισοδύναμα,

$$\chi'(z) = 0,$$

οπότε η $\chi(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$\phi(x,y,z) = xz^2 + y^3 + \chi(z) = xz^2 + y^3 + c.$$

Άρα το έργο είναι ίσο με

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(0,0,2\pi) - \phi(\sqrt{2\pi},0,0) = 0.$$

Οι ασκήσεις από το βιβλίο του Apostol.

1. Είναι $C = C_1 + C_2 + C_3$, όπου C_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0,0)$ στο $(1,0)$, C_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1,0)$ στο $(0,1)$ και C_3 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0,1)$ στο $(0,0)$.

   Το C_1 έχει παραμετρική αναπαράσταση $\mathbf{r}_1(t) = (t,0)$ $(0 \le t \le 1)$, το C_2 έχει παραμετρική αναπαράσταση $\mathbf{r}_2(t) = (1-t,t)$ $(0 \le t \le 1)$ και το C_3 έχει παραμετρική αναπαράσταση $\mathbf{r}_3(t) = (0,1-t)$ $(0 \le t \le 1)$. Είναι $\|\mathbf{r}_1{}'(t)\| = 1$, $\|\mathbf{r}_2{}'(t)\| = \sqrt{2}$ και $\|\mathbf{r}_3{}'(t)\| = 1$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_C (x+y)\,ds &= \int_{C_1}(x+y)\,ds + \int_{C_2}(x+y)\,ds + \int_{C_3}(x+y)\,ds\\ &= \int_0^1 (t+0)1\,dt + \int_0^1 (1-t+t)\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 (0+1-t)1\,dt\\ &= 1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2. Είναι $\mathbf{r}'(t) = (\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, οπότε $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{t^2+2}$. Άρα

$$\int_C z\,ds = \int_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^{{t_0}^2+2} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\Big(({t_0}^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\Big).$$

3. (a) Το $\Omega = \mathbf{R}^2$ είναι συνεκτικό. Για οποιαδήποτε σημεία A, B του Ω το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά περιέχεται στο Ω.

   (b) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ είναι συνεκτικό. Για οποιαδήποτε σημεία A, B του Ω το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά περιέχεται στο Ω.

   (c) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2>0\}$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε οποιαδήποτε σημεία A, B στο Ω. Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα A, B δεν περιέχει το $(0,0)$, τότε αυτό είναι μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B. Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα A, B περιέχει το $(0,0)$, τότε θεωρούμε ένα τρίτο σημείο C έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα A, C και με άκρα τα C, B να μην περιέχουν το $(0,0)$, οπότε μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B είναι το άθροισμα των παραπάνω διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων.

   (d) Το $\Omega = \{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε οποιαδήποτε σημεία A, B στο Ω. Αν τα A, B ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα A, B είναι μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B. Αν τα A, B δεν ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$, τότε θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ ο οποίος διέρχεται από το A και το σημείο τομής C αυτού του κύκλου με την ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$ η οποία περιέχει το B. Μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B είναι το άθροισμα ενός από τα τόξα του παραπάνω κύκλου με άκρα τα A, C και του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα C, B.

   (e) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2>1 \text{ και } (x-3)^2+y^2>1\}$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε οποιαδήποτε σημεία A, B στο Ω. Έστω ότι ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ που διέρχεται από το A τέμνει τον αρνητικό x-άξονα στο σημείο A' και ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ που διέρχεται από το B τέμνει τον αρνητικό x-άξονα στο σημείο B'. Τουλάχιστον ένα από τα δυο τόξα του πρώτου κύκλου με άκρα A, A' περιέχεται στο Ω. Ομοίως, τουλάχιστον ένα από τα δυο τόξα του δεύτερου κύκλου με άκρα B, B' περιέχεται στο Ω. Μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B είναι το άθροισμα του τόξου από το A στο A', του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα A', B' και του τόξου από το B' στο B.

   (f) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1 \text{ ή } (x-3)^2+y^2<1\}$ δεν είναι συνεκτικό. Ένα σημείο του πρώτου δίσκου με ένα σημείο του δεύτερου δίσκου δεν μπορούν να ενωθούν με καμπύλη στο Ω.

4. Η αναγκαία συνθήκη για το πρώτο διανυσματικό πεδίο είναι η

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial (xy-x)}{\partial x},$$

   και είναι λάθος.

   Η αναγκαία συνθήκη για το δεύτερο διανυσματικό πεδίο είναι η

$$\frac{\partial (xy)}{\partial y} = \frac{\partial (x^2+1)}{\partial x}, \quad \frac{\partial (xy)}{\partial z} = \frac{\partial (z^2)}{\partial x}, \quad \frac{\partial (x^2+1)}{\partial z} = \frac{\partial (z^2)}{\partial y}$$

   και είναι, επίσης, λάθος. (Δεν ικανοποιείται η πρώτη ισότητα.)

5. Η αναγκαία συνθήκη είναι η

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial(x-y)}{\partial x}\,,$$

και είναι σωστή.

Θα βρούμε την $\phi(x,y)$ ώστε να είναι

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = x+y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = x-y.$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$\phi(x,y) = \int (x+y)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + \psi(y).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$x + \psi'(y) = x - y$$

ή, ισοδύναμα,

$$\psi'(y) = -y.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y) = -\int y\,dy = -\frac{1}{2}y^2 + c,$$

οπότε

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \psi(y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + c.$$

Η c είναι αυθαίρετη σταθερά (οπότε έχουμε άπειρες λύσεις).

6. Η αναγκαία συνθήκη είναι η

$$\frac{\partial(x+z)}{\partial y} = \frac{\partial(-y-z)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial(x+z)}{\partial z} = \frac{\partial(x-y)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial(-y-z)}{\partial z} = \frac{\partial(x-y)}{\partial y}$$

και είναι σωστή. Θα βρούμε $\phi(x,y,z)$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = x+z, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = -y-z, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = x-y.$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$\phi(x,y,z) = \int (x+z)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + xz + \psi(y,z).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(y,z) = -y-z.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y,z)=\int(-y-z)\,dy=-\frac{1}{2}y^2-yz+\chi(z),$$

οπότε

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+xz+\psi(y,z)=\frac{1}{2}x^2+xz-\frac{1}{2}y^2-yz+\chi(z).$$

Τέλος, η τρίτη ισότητα γράφεται

$$x-y+\chi'(z)=x-y$$

ή, ισοδύναμα,

$$\chi'(z)=0,$$

οπότε η $\chi(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+xz-\frac{1}{2}y^2-yz+\chi(z)=\frac{1}{2}x^2+xz-\frac{1}{2}y^2-yz+c.$$

Η c είναι αυθαίρετη σταθερά (οπότε έχουμε άπειρες λύσεις).

7. Έστω οποιαδήποτε σημεία A,B στο Ω. Θεωρούμε οποιαδήποτε καμπύλη C με τροχιά στο Ω με αρχή A και τέλος B. Τότε

$$\phi(B)-\phi(A)=\int_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}=\psi(B)-\psi(A).$$

Συνεπάγεται

$$\phi(B)-\psi(B)=\phi(A)-\psi(A),$$

οπότε η συνάρτηση $\phi-\psi$ έχει ίδιες τιμές σε οποιαδήποτε δυο σημεία του Ω και, επομένως, είναι σταθερή στο Ω.