ΛΥΣΕΙΣ 4.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

1. 8.1.(1) Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green στο τετράγωνο $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Η καμπύλη C (η συνοριακή καμπύλη του U) είναι καμπύλη Jordan με την θετική φορά διαγραφής και το U είναι το εσωτερικό της. Οι συναρτήσεις $Q(x, y) = y$ και $P(x, y) = -x$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbf{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την καμπύλη C και το εσωτερικό της U. Άρα

$$\oint_C y\,dx - x\,dy = \iint_U \Big(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\Big)\,dxdy = -2\iint_U dxdy.$$

Τώρα, είτε σκεφτόμαστε ότι το $\iint_U dxdy$ είναι ίσο με το εμβαδό του U, δηλαδή ίσο με 4, είτε υπολογίζουμε

$$\iint_U dxdy = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{-1}^{1} dy\Big)\,dx = \int_{-1}^{1} 2\,dx = 4.$$

Άρα

$$\oint_C y\,dx - x\,dy = -8.$$

2. 8.1(3)(a) Ο δίσκος D περιγράφεται από την ανισότητα $x^2 + y^2 \le R^2$. Η συνοριακή του καμπύλη C περιγράφεται από την $x^2 + y^2 = R^2$. Η C είναι καμπύλη Jordan και το εσωτερικό της είναι ο δίσκος D. Οι συναρτήσεις $P(x, y) = xy^2$ και $Q(x, y) = -yx^2$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbf{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την καμπύλη C και το εσωτερικό της D. Άρα ο τύπος του Green είναι ο

$$\iint_D \Big(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-yx^2)}{\partial y}\Big)\,dxdy = \oint_C -yx^2\,dx + xy^2\,dy.$$

Θα επαληθεύσουμε τον τύπο υπολογίζοντας χωριστά τα δυο ολοκληρώματα.

Ο απλούστερος τρόπος να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα είναι με αλλαγή από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες: γράφουμε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, όπου το r μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, R]$ και το θ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Τότε $x^2 + y^2 = r^2$ και $dxdy = rdrd\theta$, οπότε το διπλό ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\iint_D (y^2 + x^2)\,dxdy = \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta\Big)\,rdr = 2\pi\int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi R^4}{2}\,.$$

Η συνηθισμένη παραμετρική αναπαράσταση της C με την θετική φορά διαγραφής της είναι η $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_0^{2\pi} (-R\sin t R^2 \cos^2 t(-R\sin t) + R\cos t R^2 \sin^2 t R\cos t)\, dt$$

$$= 2R^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{\pi R^4}{2}\,.$$

3. 8.1(10) Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green με τις συναρτήσεις $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ και $P = -\frac{\partial f}{\partial x}$ και βρίσκουμε:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx - \frac{\partial f}{\partial x}\, dy = \iint_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{\partial f}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big)\, dxdy$$

$$= -\iint_D \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)\, dxdy = \iint_D 0\, dxdy = 0.$$

Οι ασκήσεις από το βιβλίο του Apostol.

1. Παρατηρώντας πώς μεταβάλλονται οι συναρτήσεις $x = x(t) = 2\cos^3 t$ και $y = y(t) = 2\sin^3 t$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη C είναι καμπύλη Jordan και ότι το $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ την διαγράφει με την θετική φορά. Οι συντεταγμένες $x = x(t)$ και $y = y(t)$ ικανοποιούν την ισότητα

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}\,,$$

οπότε το εσωτερικό U της C καθορίζεται από την ανισότητα

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le 2^{\frac{2}{3}}\,.$$

Οι συναρτήσεις $Q(x, y) = y$ και $P(x, y) = x$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbf{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την καμπύλη C και το εσωτερικό της U. Άρα

$$\oint_C y\, dx + x\, dy = \iint_U \Big(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\Big)\, dxdy = \iint_U 0\, dxdy = 0.$$

2. Η C είναι καμπύλη Jordan και το εσωτερικό της είναι ο δίσκος D με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα $r > 0$. Η συνάρτηση $Q(x, y) = xe^{-y^2}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbf{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την C και το εσωτερικό της. Όμως, η συνάρτηση $P(x, y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$ **δεν** έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποιο ανοικτό, συνεκτικό σύνολο το

οποίο περιέχει την C και το εσωτερικό της. Πράγματι, η $P(x,y)$ απειρίζεται στο σημείο $(0,0)$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της C. Μπορούμε, όμως, να γράψουμε

$$P(x,y) = R(x,y) + \frac{1}{x^2+y^2}\,,$$

όπου η συνάρτηση $R(x,y) = -x^2ye^{-y^2}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbf{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την C και το εσωτερικό της. Τότε

$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q\,dx + R\,dy + \oint_C \frac{1}{x^2+y^2}\,dy,$$

και στο πρώτο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green:

$$\oint_C Q\,dx + R\,dy = \iint\limits_S \Big(\frac{\partial(-x^2ye^{-y^2})}{\partial x} + \frac{\partial(xe^{-y^2})}{\partial y}\Big)\,dxdy = \iint\limits_S 0\,dxdy = 0.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε κατ΄ ευθείαν το δεύτερο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με την παραμετρική αναπαράσταση $\mathbf{r}(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ της C:

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r\cos t\,dt = \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0.$$

Άρα

$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = 0.$$

3. Είναι

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = v\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y}\,.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\iint\limits_U \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\,dxdy &= \iint\limits_U \Big(\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y}\Big)\,dxdy = \oint\limits_C uv\,dx + uv\,dy \\ &= \oint\limits_C y\,dx + y\,dy,\end{aligned}$$

όπου C είναι ο κύκλος $x^2+y^2=1$ με την θετική φορά διαγραφής. Με την παραμετρική αναπαράσταση $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ υπολογίζουμε

$$\oint\limits_C y\,dx + y\,dy = \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t) + \sin t\cos t)\,dt = -\pi.$$

Άρα

$$\iint\limits_U \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\,dxdy = -\pi.$$