ΛΥΣΕΙΣ 5.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

1. 8.1.(2) Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green στον δίσκο D με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $R>0$ με συνοριακή καμπύλη C τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$ και με το πεδίο
$$(-y,x).$$
Τότε
$$\oint_C -y\,dx + x\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\Big)\,dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\text{εμβ}(D).$$
Άρα
$$\text{εμβ}(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}((-R\sin t)(-R\sin t)+(R\cos t)(R\cos t))\,dt = \pi R^2\,.$$

2. 8.1(9) Ονομάζουμε C τον κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{b}$ με την θετική φορά του και C_1 τον κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{a}$ με την αρνητική φορά του. Τότε ο γενικός τύπος του Green γράφεται
$$\iint_D \Big(\frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x}-\frac{\partial(2x^3-y^3)}{\partial y}\Big)\,dxdy = \oint_C (2x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy$$
$$+\oint_{C_1}(2x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy.$$
Το αριστερό μέρος είναι ίσο με
$$3\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = 3\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} r^3\,dr\Big)\,d\theta = \frac{3\pi}{2}(b^2-a^2).$$
Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους είναι ίσο με
$$b^2\int_0^{2\pi}\big(-(2\cos^3 t-\sin^3 t)\sin t+(\cos^3 t+\sin^3 t)\cos t\big)\,dt = \frac{3\pi}{2}b^2\,.$$
Ομοίως, το δεύτερο υπολογίζεται ίσο με $-\frac{3\pi}{2}a^2$. (Το $-$ προκύπτει λόγω αντίθετης φοράς.)

3. 7.3.(1) Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με
$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 2u & 0\\ 0 & 1 & 2v\end{vmatrix} = (4uv,-4v,2).$$

Στο σημείο $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ αντιστοιχεί το $(u, v) = (0, 1)$. Άρα στο σημείο $(0, 1, 1)$ της επιφάνειας το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι το

$$(0, -4, 2).$$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η

$$0 \cdot (x - 0) + (-4) \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

ή, ισοδύναμα, $2y - z = 1$.

4. 7.3.(9)(a) Οι παράμετροι είναι τα y, z. Το βασικό εξωτερικό γινόμενο στο σημείο $(h(y_0, z_0), y_0, z_0)$ είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(y_0, z_0) & 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z}(y_0, z_0) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Big(1, -\frac{\partial h}{\partial y}(y_0, z_0), -\frac{\partial h}{\partial z}(y_0, z_0)\Big).$$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο ίδιο σημείο είναι η

$$1 \cdot (x - h(y_0, z_0)) + \Big(-\frac{\partial h}{\partial y}(y_0, z_0)\Big) \cdot (y - y_0) + \Big(-\frac{\partial h}{\partial z}(y_0, z_0)\Big) \cdot (z - z_0) = 0$$

ή, ισοδύναμα, $2y - z = 1$.

(b) Ομοίως.

5. 7.4.(5) Το (u, v) διατρέχει τον δίσκο D που καθορίζεται από την $u^2 + v^2 \leq 1$. Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2).$$

Άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$\sqrt{6} \iint\limits_D dxdy = \pi\sqrt{6}\,.$$

6. 7.4.(13) Το z εκφράζεται συναρτήσει των x, y ως

$$z = f(x, y) = 1 - x - y$$

και το (x, y) διατρέχει το ελλειπτικό χωρίο D που καθορίζεται από την $x^2 + 2y^2 \leq 1$. Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$\sqrt{3} \iint\limits_D dxdy = \pi\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Οι ασκήσεις από το βιβλίο του Apostol.

1. Έστω ότι η C έχει την θετική φορά της.

   Θεωρούμε τις

$$Q_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad P_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

   και τις

$$Q_2(x,y) = -\frac{y-1}{(x-3)^2+(y-1)^2}\,, \qquad P_2(x,y) = \frac{(x-3)}{(x-3)^2+(y-1)^2}\,.$$

   Τότε, προφανώς, $Q = Q_1 + Q_2$ και $P = P_1 + P_2$.

   Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\partial Q_1}{\partial y} = \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

   στο σύνολο $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και, ομοίως, αποδεικνύεται ότι

$$\frac{\partial Q_2}{\partial y} = \frac{\partial P_2}{\partial x}$$

   στο σύνολο $\mathbf{R}^2 \setminus \{(3,1)\}$.

   Έχουμε αποδείξει ότι, αν η C περιέχει το $(0,0)$ στο εσωτερικό της, τότε

$$\oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy = 2\pi$$

   και, αν δεν περιέχει το $(0,0)$ στο εσωτερικό της, τότε

$$\oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy = 0.$$

   Ομοίως αποδεικνύεται ότι, αν η C περιέχει το $(3,1)$ στο εσωτερικό της, τότε

$$\oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 2\pi$$

   και, αν δεν περιέχει το $(3,1)$ στο εσωτερικό της, τότε

$$\oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 0.$$

   Άρα, αν η C περιέχει και τα δυο σημεία στο εσωτερικό της, τότε

$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy + \oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 2\pi + 2\pi = 4\pi,$$

   αν περιέχει ένα μόνο από τα δυο σημεία στο εσωτερικό της, τότε

$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy + \oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 2\pi$$

και αν δεν περιέχει κανένα από τα δυο σημεία στο εσωτερικό της, τότε

$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy + \oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 0.$$

Άρα οι πιθανές τιμές του ολοκληρώματος είναι οι $0, 2\pi, 4\pi$ και οι αντίθετές τους (όταν η C αλλάξει φορά).

2. Έστω $ax+by+cz=d$ η εξίσωση του επιπέδου. Επειδή δεν είναι παράλληλο με κανέναν από τους άξονες συντεταγμένων, είναι $a \neq 0$, $b \neq 0$ και $c \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι
$$\text{εμβ}(S) = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}\text{εμβ}(S_z).$$
Θεωρώντας και τις άλλες δυο παρόμοιες ισότητες, υψώνοντάς τες στο τετράγωνο και αθροίζοντας, βρίσκουμε τον ζητούμενο τύπο.

3. Παρόμοια με την άσκηση 13 της ενότητας 7.4 στο βιβλίο των Marsden - Tromba που λύσαμε πιο πάνω.

4. Επειδή η επιφάνεια είναι *πάνω* από το xy-επίπεδο, είναι $z \geq 0$ για κάθε σημείο (x,y,z) πάνω της. Άρα μια παραμετρική αναπαράσταση είναι η
$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{2xy}),$$
όπου το (x,y) διατρέχει το τετράγωνο D του xy-επιπέδου που περιγράφεται από τις
$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$
Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \sqrt{\frac{y}{2x}} \\ 0 & 1 & \sqrt{\frac{x}{2y}} \end{vmatrix} = \Big(-\sqrt{\frac{y}{2x}}, -\sqrt{\frac{x}{2y}}, 1\Big).$$
Άρα το εμβαδό είναι ίσο με
$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dxdy = \int_0^2 \Big(\int_0^1 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 x \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt\,dx = 4.$$

5. Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u).$$
Άρα το εμβαδό είναι ίσο με
$$\begin{aligned}\int_0^4 \Big(\int_0^{2\pi} \sqrt{4u^4+u^2}\,dv\Big)\,du &= 2\pi\int_0^4 \sqrt{4u^4+u^2}\,du \\ &= 2\pi\int_0^4 u\sqrt{4u^2+1}\,du = \frac{\pi}{6}(65^{\frac{3}{2}}-1)\,.\end{aligned}$$