

ΛΥΣΕΙΣ 6.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

(1) 7.5.(3) Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}),$$

όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq a^2$. Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathbf{r}(x, y)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Άρα

$$\iint_S z \, dA = \iint_T \frac{az}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy = a \iint_T dx dy = a \, \text{εμβ}(T) = \pi a^3.$$

(2) 7.5.(5) Θα βρούμε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ και $(0, 1, 1)$. Ένας τρόπος είναι να βρούμε συντελεστές a, b, c, d ώστε τα τρία σημεία να ικανοποιούν την $ax + by + cz = d$. Καταλήγουμε στις $a = d$, $2b = d$, $b + c = d$, οπότε παίρνουμε $a = d = 2$ και $b = c = 1$ και βρίσκουμε την εξίσωση $2x + y + z = 2$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να βρούμε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο. Το διάνυσμα αυτό θα είναι κάθετο στα διανύσματα $(0, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$ και $(0, 1, 1) - (0, 2, 0) = (0, -1, 1)$. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το εξωτερικό γινόμενο $(-1, 1, 1) \times (0, -1, 1) = (2, 1, 1)$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $2x + y + z = d$ και βρίσκουμε $d = 2$ χρησιμοποιώντας ένα από τα τρία σημεία που ανήκουν στο επίπεδο.

Τώρα η παραμετρική αναπαράσταση γράφεται

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2 - 2x - y).$$

Το παραμετρικό χωρίο T είναι η κατακόρυφη προβολή της τριγωνικής επιφάνειας S στο xy -επίπεδο. Αυτή είναι η τριγωνική επιφάνεια στο xy -επίπεδο με κορυφές τις προβολές των κορυφών της S , δηλαδή τα σημεία $(1, 0)$, $(0, 2)$ και $(0, 1)$. Έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (2, 1, 1)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{6}.$$

Άρα

$$\iint_S xyz \, dA = \sqrt{6} \iint_T xy(2 - 2x - y) \, dx dy.$$

Τώρα, το χωρίο T στο xy -επίπεδο μπορεί να περιγραφεί από τις ανισότητες: $0 \leq x \leq 1$ και $1 - x \leq y \leq 2 - 2x$. Άρα

$$\iint_S xyz \, dA = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{2-2x} xy(2 - 2x - y) \, dy \right) dx = \frac{1}{30}.$$

(3) 7.5.(7) Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

με παραμετρικό χωρίο T τον δίσκο στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$. Έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Άρα

$$\iint_S z \, dA = \iint_T (x^2 + y^2) \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \right) d\theta = \frac{25\sqrt{5} - 1}{60} \pi.$$

(4) 7.6.(3) Χωρίζουμε την S σε δυο επιφάνειες, το ημισφαίριο S_1 με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$, και το επίπεδο μέρος της, το S_2 με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}_2(x, y) = (x, y, 0),$$

όπου και πάλι το (x, y) διατρέχει τον ίδιο δίσκο T .

Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \mathbf{r}(x, y)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y}$ έχει θετική z -συντεταγμένη, οπότε κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S . Άρα

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_T (2x, 2y, 2z) \cdot (x, y, z) \frac{1}{z} \, dx dy = 2 \iint_T \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \, dx dy = 2\pi^2,$$

όπου για τον υπολογισμό του τελευταίου διπλού ολοκληρώματος κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Ομοίως,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} = (0, 0, 1)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} \right\| = 1.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y}$ έχει θετική z -συντεταγμένη, οπότε κατευθύνεται προς το εσωτερικό της S . Επομένως, θεωρούμε

$$\boldsymbol{\eta} = (0, 0, -1)$$

ώστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S . Άρα

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_T (2x, 2y, 2z) \cdot (0, 0, -1) \, dx dy = -2 \iint_T z \, dx dy = 0$$

διότι είναι $z = 0$ στην S_2 . Άρα

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi^2.$$

(5) 7.6.(5) Υπολογίζουμε

$$\nabla \times \mathbf{F} = (2zx^3, -3zx^2y^2, -2).$$

Η S έχει παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2-y^2}),$$

όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$.

Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(-\frac{x}{3\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\frac{y}{3\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \frac{\sqrt{9-8x^2-8y^2}}{3\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ έχει θετική z -συντεταγμένη. Άρα

$$\boldsymbol{\eta} = \left(-\frac{x}{\sqrt{9-8x^2-8y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{9-8x^2-8y^2}}, \frac{3\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{9-8x^2-8y^2}} \right)$$

και

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \frac{1}{9} \iint_T (2x^4 - 3x^2y^3 - 18) dx dy = -\frac{213}{108}\pi.$$

(6) 7.6.(6) Ομοίως.

(7) 7.6.(9) Παραμετρικοποιούμε την σφαίρα S με σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

όπου $(\theta, \phi) \in T = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{r}(\theta, \phi)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = \sin \phi.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$ έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της S , οπότε θεωρούμε

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r}(\theta, \phi).$$

Άρα

$$\iint_S \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \iint_T (6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^5 \phi + \cos^4 \phi \sin \phi) d\theta d\phi = \frac{12}{5}\pi.$$

- (8) 7.6.(10) Χωρίζουμε την επιφάνεια S σε τρία μέρη. Το πρώτο είναι η κάτω πλευρά S_1 με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}_1(x, y) = (x, y, 0),$$

όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$. Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} = (0, 0, 1)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} \right\| = 1.$$

Θέλουμε το $\mathbf{n}$ να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S , οπότε

$$\mathbf{n} = (0, 0, -1).$$

Άρα

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = - \iint_T z(x^2 + y^2)^2 \, dx dy = 0,$$

διότι είναι $z = 0$ στην S_1 .

Το δεύτερο μέρος είναι η πάνω πλευρά S_2 με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}_2(x, y) = (x, y, 1),$$

όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$. Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} = (0, 0, 1)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial y} \right\| = 1.$$

Θέλουμε το $\mathbf{n}$ να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S , οπότε

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1).$$

Άρα

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_T z(x^2 + y^2)^2 \, dx dy = \iint_T z(x^2 + y^2)^2 \, dx dy = \frac{\pi}{3},$$

όπου χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες στο τελευταίο ολοκλήρωμα.

Το τρίτο μέρος είναι η κυλινδρική επιφάνεια S_3 με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}_3(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z),$$

όπου $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial z} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial z} \right\| = 1.$$

Θέλουμε το $\mathbf{n}$ να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S , οπότε

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Άρα

$$\iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \right) dz = 0.$$

Οι ασκήσεις από το βιβλίο του Apostol.

(1) (α) Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{r}(\theta, \phi)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = \sin \phi.$$

Επειδή $\sin \phi \geq 0$, το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$ έχει κατεύθυνση προς την εσωτερική μεριά της σφαίρας, οπότε

$$\boldsymbol{\eta}(\theta, \phi) = -\frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|} = \mathbf{r}(\theta, \phi).$$

Αυτό, βέβαια, μπορούμε να το δούμε και ανεξάρτητα από τον παραπάνω υπολογισμό.

Τώρα, επειδή $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r}(\theta, \phi) = (x, y, z)$ για κάθε $(x, y, z) \in S$,

$$\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = (x, y, 0) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 = \sin^2 \phi,$$

οπότε

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \sin \phi d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

(β) Τώρα

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{r}(x, y)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά της σφαίρας, οπότε

$$\boldsymbol{\eta}(x, y) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|} = \mathbf{r}(x, y).$$

Πάλι

$$\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = (x, y, 0) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2,$$

οπότε

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \frac{4\pi}{3}.$$

(2) (α) Η συνάρτηση $\mathbf{r} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ με τύπο $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, 1 - 2u)$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και, επομένως, απεικονίζει γραμμικά σχήματα σε γραμμικά σχήματα. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathbf{r}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{r}(0, 0) = (0, 0, 1)$. Άρα η τριγωνική επιφάνεια T στον $\mathbf{R}^2$ με κορυφές $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και $(0, 0)$ απεικονίζεται μέσω της $\mathbf{r}$ στην τριγωνική επιφάνεια S στον $\mathbf{R}^3$.

Κατόπιν,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2, -2, -2)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = 2\sqrt{3}.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ έχει αρνητική z -συντεταγμένη, οπότε

$$\boldsymbol{\eta}(u, v) = -\frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Επίσης,

$$\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

για κάθε $(x, y, z) \in S$, οπότε

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_T 2\sqrt{3} dudv = 2 \text{ εμβ}(T) = \frac{1}{2}.$$

(β) Εύκολα βλέπουμε, όπως σε μια από τις προηγούμενες ασκήσεις, ότι το επίπεδο που περιέχει τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ έχει εξίσωση $x + y + z = 1$. Ο πρώτος τρόπος είναι να βρούμε συντελεστές a, b, c, d ώστε τα τρία σημεία να ικανοποιούν την $ax + by + cz = d$. Καταλήγουμε στις $a = d, b = d, c = d$, οπότε παίρνουμε $a = b = c = d = 1$. Ο δεύτερος τρόπος είναι να βρούμε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο. Το διάνυσμα αυτό θα είναι κάθετο στα διανύσματα $(0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το εξωτερικό γινόμενο $(-1, 0, 1) \times (0, -1, 1) = (1, 1, 1)$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $x + y + z = d$ και βρίσκουμε $d = 1$ χρησιμοποιώντας ένα από τα τρία σημεία που ανήκουν στο επίπεδο.

Τώρα η παραμετρική αναπαράσταση γράφεται συγκεκριμένα

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y).$$

Το παραμετρικό χωρίο T είναι η κατακόρυφη προβολή της S στο xy -επίπεδο. Αυτή είναι η τριγωνική επιφάνεια στο xy -επίπεδο με κορυφές τις προβολές των κορυφών της S , δηλαδή τα σημεία $(1, 0)$, $(0, 1)$ και $(0, 0)$. Έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (1, 1, 1)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{3}.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ έχει θετική z -συντεταγμένη, οπότε

$$\boldsymbol{\eta}(x, y) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Όπως στο (α),

$$\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

για κάθε $(x, y, z) \in S$, οπότε

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_T \sqrt{3} dudv = \text{εμβ}(T) = \frac{1}{2}.$$

(3) Η παραμετρική αναπαράσταση είναι

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

οπότε βρίσκουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}.$$

Το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ έχει μη αρνητική z -συντεταγμένη, οπότε

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

Τώρα

$$\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}} \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right)$$

και

$$dA = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dxdy,$$

οπότε

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dA = \iint_T \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dxdy.$$

(4) Η πρώτη ισότητα είναι προφανής. Για την δεύτερη υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} dxdy = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dxdy = \left(0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) dxdy \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} dxdy \end{aligned}$$

οπότε

$$\iint_S \phi(x, y, z) dy \wedge dz = - \iint_T \phi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} dxdy.$$

Η τρίτη ισότητα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

(5) Επειδή η παραμετρικοποίηση με σφαιρικές συντεταγμένες καταλήγει σε κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σφαίρας, θεωρούμε την παραλλαγή

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, -r \cos \phi)$$

με $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. (Έχουμε αλλάξει την z -συντεταγμένη των σφαιρικών συντεταγμένων: έχουμε κάνει μια ανάκλαση της σφαίρας ως προς το xy -επίπεδο.) Τότε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin \phi \mathbf{r}(\theta, \phi)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = r^2 \sin \phi.$$

Επειδή $\sin \phi \geq 0$, το $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$ έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά της σφαίρας, οπότε

$$\boldsymbol{\eta}(\theta, \phi) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|} = \frac{1}{r} \mathbf{r}(\theta, \phi).$$

Τώρα, με $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ και $z = -r \cos \phi$ υπολογίζουμε τις Ιακωβιανές ορίζουσες

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} = -r^2 \sin \phi \cos \phi, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} = r^2 \cos \theta \sin^2 \phi, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} = r^2 \sin \theta \sin^2 \phi.$$

Τέλος, βρίσκουμε ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ίσο με

$$-r^4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \phi \cos \phi (1 + \cos^2 \theta) d\phi d\theta = 0.$$

(6) Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = 2x$ είναι κάθετος προς το xy -επίπεδο, οπότε το παραμετρικό χωρίο T , δηλαδή η κατακόρυφη προβολή της S στο xy -επίπεδο, είναι ο δίσκος του xy -επιπέδου με την ίδια εξίσωση. Η εξίσωση γράφεται $(x-1)^2 + y^2 = 1$, οπότε το T είναι ο δίσκος με κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα 1. Έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

οπότε

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{2}.$$

Για κάθε $(x, y, z) \in S$ ισχύει $x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1 = x^4 - y^4 + (y^2 - x^2)z^2 + 1 = x^4 - y^4 + (y^2 - x^2)(x^2 + y^2) + 1 = 1$, οπότε

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dA = \sqrt{2} \iint_T dx dy = \sqrt{2} \text{εμβ}(T) = \sqrt{2} \pi.$$