ΛΥΣΕΙΣ 7.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

(1) 8.2.(1) Η συνοριακή καμπύλη C της S βρίσκεται πάνω στο xy-επίπεδο και έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Επειδή τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{\eta}$ στην S έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω, η φορά διαγραφής της C στο τύπο του Stokes είναι η θετική της φορά στο xy-επίπεδο. Επομένως, παραμετρικοποιούμε την C με

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\quad z=0,\qquad 0\le\theta\le 2\pi,$$

οπότε

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\int_C y\,dx-x\,dy+zx^3y^2\,dz=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,d\theta=-2\pi.$$

(2) 8.2.(2) Η συνοριακή καμπύλη C της S βρίσκεται πάνω στο xy-επίπεδο και έχει εξίσωση $x^2+y^2=16$. Τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{\eta}$ στην S έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω, οπότε η φορά διαγραφής της C στο τύπο του Stokes είναι η θετική της φορά στο xy-επίπεδο. Επομένως, παραμετρικοποιούμε την C με

$$x=4\cos\theta,\quad y=4\sin\theta,\quad z=0,\qquad 0\le\theta\le 2\pi,$$

οπότε

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\int_C(x^2+y-4)\,dx+3xy\,dy+(2xz+z^2)\,dz=\ldots=-16\pi.$$

(3) 8.2.(10) Χωρίζουμε την επιφάνεια S σε δυο επιφάνειες S_1 και S_2 με τον κύκλο C με εξίσωση $x^2+y^2=10$ στο xy-επίπεδο, ο οποίος είναι η τομή της S με το xy-επίπεδο. Η συνοριακή καμπύλη και των δυο επιφανειών είναι ο κύκλος C. Η S_1 είναι το μέρος της S που βρίσκεται πάνω από το xy-επίπεδο και η S_2 είναι το μέρος της S που βρίσκεται κάτω από το xy-επίπεδο. Αν $\mathbf{\eta}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της S με κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά της S, τότε η φορά διαγραφής της C ως συνοριακής καμπύλης της S_1 είναι η θετική στο xy-επίπεδο ενώ η φορά διαγραφής της C ως συνοριακής καμπύλης της S_2 είναι η αρνητική στο xy-επίπεδο. Άρα, αν θεωρήσουμε την C με την θετική (στο xy-επίπεδο) φορά διαγραφής της, τότε, σύμφωνα με τον τύπο του Stokes, είναι

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S_1}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}+\iint_{S_2}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\int_C\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds-\int_C\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds=0.$$

(4) 8.2.(15) Έστω ότι οι δυο επιφάνειες σχηματίζουν μια συνολική επιφάνεια η οποία είναι η συνοριακή επιφάνεια ενός ανοικτού, συνεκτικού συνόλου Ω στον $\mathbf{R}^3$ (μια πολύ συνηθισμένη περίπτωση). Θεωρούμε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{\eta}$ στα σημεία της S_1 να κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω και τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\mathbf{\eta}$ στα σημεία της S_2 να κατευθύνονται προς το εσωτερικό του Ω. Αν C είναι η κοινή συνοριακή καμπύλη των δυο επιφανειών, τότε η φορά διαγραφής της είναι η ίδια και ως συνοριακή καμπύλη της S_1 και ως συνοριακή καμπύλη της S_2. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του Stokes,

$$\iint_{S_1}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}=\int_C\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds=\iint_{S_2}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}.$$

(5) 8.2.(17) Χωρίζουμε την S σε δυο επιφάνειες S_1 και S_2 με κατάλληλη καμπύλη C η οποία βρίσκεται πάνω στην S (όπως, για παράδειγμα, στην άσκηση 10 με το ελλειψοειδές). Έστω ότι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\boldsymbol{\eta}$ στα σημεία της S κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω, όπου Ω είναι το στερεό που περικλείεται από την S. Τώρα, τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\boldsymbol{\eta}$ στα σημεία της S_1 κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω αλλά και τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\boldsymbol{\eta}$ στα σημεία της S_2 κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω (σε αντίθεση με την άσκηση 15). Τότε η φορά διαγραφής της C ως συνοριακή καμπύλη της S_1 είναι αντίθετη από την φορά διαγραφής της ως συνοριακή καμπύλη της S_2. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του Stokes,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds - \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0.$$

Οι ασκήσεις από το βιβλίο του Apostol.

(1) Η συνοριακή καμπύλη C της επιφάνειας S είναι ο κύκλος στο xy-επίπεδο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ και η φορά διαγραφής της C στον τύπο του Stokes είναι η θετική φορά της στο xy-επίπεδο. Επομένως, παραμετρικοποιούμε την C ως εξής:

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = 0, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Τότε

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA = \int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\, d\theta = -\pi.$$

(2) Η συνοριακή καμπύλη C της επιφάνειας S αποτελείται από τις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου στο xy-επίπεδο που ορίζεται από τις $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$. Η φορά διαγραφής της C στον τύπο του Stokes είναι η θετική φορά της στο xy-επίπεδο. Έστω C_1 η πλευρά με $x = t$, $(0 \le t \le 2)$, $y = 0$, $z = 0$, έστω C_2 η πλευρά με $x = 2$, $y = t$, $(0 \le t \le 2)$, $z = 0$, έστω C_3 η πλευρά με $x = 2 - t$, $(0 \le t \le 2)$, $y = 2$, $z = 0$ και έστω C_4 η πλευρά με $x = 0$, $y = 2 - t$, $(0 \le t \le 2)$, $z = 0$. Τότε

$$\begin{aligned}\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA &= \int_{C_1} (y - z)\, dx + yz\, dy - xz\, dz + \int_{C_2} (y - z)\, dx + yz\, dy - xz\, dz \\ &\quad + \int_{C_3} (y - z)\, dx + yz\, dy - xz\, dz + \int_{C_4} (y - z)\, dx + yz\, dy - xz\, dz \\ &= 0 + 0 - \int_0^2 2\, dt + 0 = -4.\end{aligned}$$

(3) Παρατηρούμε ότι, αν $\mathbf{f} = (y + z, z + x, x + y)$, τότε $\operatorname{curl} \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Θεωρούμε, λοιπόν, οποιαδήποτε επιφάνεια S με συνοριακή καμπύλη την C (για παράδειγμα, την επίπεδη ελλειπτική επιφάνεια που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $y = z$ και περιορίζεται μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2y$) και τότε

$$\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA = 0.$$

(4) Η $\mathbf{f} = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2)$ έχει $\operatorname{curl}\mathbf{f} = 2(y-z, z-x, x-y)$ και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{\eta}$ στο σημείο (x,y,z) της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = 2ax$ είναι το $\frac{1}{a}(x-a,y,z)$, οπότε

$$\operatorname{curl}\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\eta} = 2z-2y.$$

Θεωρούμε την επιφάνεια S η οποία είναι το μέρος του ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2 = 2ax$, $z>0$, που περιορίζεται μέσα στον κύλινδρο $x^2+y^2 = 2bx$. Η συνοριακή καμπύλη της S είναι η C. Από το Θεώρημα του Stokes:

$$\int_C (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA = 2\iint_S (z-y)\,dA.$$

Παραμετρικοποιούμε την S με παραμετρικό χωρίο T την κατακόρυφη προβολή της στο xy-επίπεδο, δηλαδή τον δίσκο $x^2+y^2\le 2bx$, και με παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,z) = (x,y,\sqrt{2ax-x^2-y^2}).$$

Τότε

$$\left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right\| = \frac{a}{z}\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_C (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz &= 2a\iint_T \left(1-\frac{y}{z}\right)dxdy\\ &= 2a\iint_T dxdy = 2a\,\text{εμβ}(T) = 2\pi ab^2\,.\end{aligned}$$