ΛΥΣΕΙΣ 8.

Οι ασκήσεις από το βιβλίο των Marsden - Tromba.

(1) $8.4.(2)$ Έστω S η μοναδιαία σφαίρα που ορίζεται από την $x^2+y^2+z^2=1$ στον $\mathbb{R}^3$ και Ω η μοναδιαία μπάλα που ορίζεται από την $x^2+y^2+z^2<1$. Αν **η** είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της S με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω, τότε από το θεώρημα του Gauss συνεπάγεται

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA=\iiint\limits_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz=3\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$
$$=3\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} r^4\sin\phi\,d\phi\Big)d\theta\Big)dr=\frac{12\pi}{5}\,,$$

όπου για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος στο Ω χρησιμοποιήσαμε σφαιρικές συντεταγμένες.

(2) $8.4.(3)$ *Απ' ευθείας υπολογισμός.* Η συνοριακή επιφάνεια $\partial\Omega$ του κύβου Ω αποτελείται από έξι επιφάνειες $S_1\,,\,\ldots\,,S_6$. Η S_1 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x,y,0)$ με $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα **η**$=(0,0,-1)$, οπότε

$$\iint\limits_{S_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S_1}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA=\iint\limits_{S_1}0\,dA=0.$$

Η S_2 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x,y,1)$ με $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα **η**$=(0,0,1)$, οπότε

$$\iint\limits_{S_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S_2}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA=\iint\limits_{S_2}dA=\text{εμβ}\,(S_2)=1.$$

Η S_3 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x,0,z)$ με $0\le x\le 1, 0\le z\le 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα **η**$=(0,-1,0)$, οπότε

$$\iint\limits_{S_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S_3}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA=\iint\limits_{S_3}0\,dA=0.$$

Η S_4 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x,1,z)$ με $0\le x\le 1, 0\le z\le 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα **η**$=(0,1,0)$, οπότε

$$\iint\limits_{S_4}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S_4}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA=\iint\limits_{S_4}dA=\text{εμβ}\,(S_4)=1.$$

Η S_5 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(0,y,z)$ με $0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα **η**$=(-1,0,0)$, οπότε

$$\iint\limits_{S_5}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint\limits_{S_5}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA=\iint\limits_{S_5}0\,dA=0.$$

Τέλος, η S_6 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(1, y, z)$ με $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα $\boldsymbol{\eta}= (1,0,0)$, οπότε

$$\iint\limits_{S_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{S_6} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA = \iint\limits_{S_6} dA = \text{εμβ}\,(S_6) = 1.$$

Άρα

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

Υπολογισμός με το θεώρημα απόκλισης. Είναι

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA = \iiint\limits_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = 3 \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = 3\,\text{όγκος}\,(\Omega) = 3.$$

(3) $8.4.(5)(a)$ Η προβολή του Ω στο xy-επίπεδο είναι ο μοναδιαίος δίσκος T που περιγράφεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$ και, για κάθε (x, y) στο T, είναι $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Άρα

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA = \iiint\limits_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} x\, dxdydz$$

$$= \iint\limits_{T} \Big(\int\limits_{x^2+y^2}^{1} x\, dz \Big)\, dxdy = \iint\limits_{T} x(1 - x^2 - y^2)\, dxdy = 0.$$

(4) $8.4.(8)$ Έστω Ω η μοναδιαία μπάλα που ορίζεται από την $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ οπότε η μοναδιαία σφαίρα $\partial\Omega$ ορίζεται από την $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Αν $\boldsymbol{\eta}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της S με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω, τότε από το θεώρημα του Gauss συνεπάγεται

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA = \iiint\limits_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = 3 \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + x^2 + z^2)\, dxdydz$$

$$= 3 \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^{\pi} r^4 \sin\phi\, d\phi \Big) d\theta \Big) dr = \frac{12\pi}{5},$$

όπως στην πρώτη άσκηση.

(5) $8.4.(10)$ Η προβολή του κυλίνδρου S στο xy-επίπεδο είναι ο μοναδιαίος δίσκος T που περιγράφεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$ και, για κάθε (x, y) στο T, είναι $0 \leq z \leq 1$. Άρα

$$\iint\limits_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}\, dA = \iiint\limits_{S} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint\limits_{S} (x^2 + y^2)^2\, dxdydz$$

$$= \iint\limits_{T} \Big(\int\limits_0^1 (x^2 + y^2)^2\, dz \Big)\, dxdy = \iint\limits_{T} (x^2 + y^2)^2\, dxdy$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{2\pi} r^5\, d\theta \Big)\, dr = \frac{\pi}{3},$$

όπου στο διπλό ολοκλήρωμα στον δίσκο T χρησιμοποιήσαμε πολικές συντεταγμένες.

(6) $8.4.(18)$ Στα σημεία της επιφάνειας S ισχύει $\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}=0$, διότι το διάνυσμα $\mathbf{F}$ εφάπτεται της S και το διάνυσμα $\boldsymbol{\eta}$ είναι κάθετο στην S. Άρα

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iint_{S} \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}\,dA = \iint_{S} 0\,dA = 0.$$