Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Δέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Υπολογίστε το $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$ όταν $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } -2 \le x < 0 \\ 2 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 3/x & \text{αν } 1 < x \le 4 \end{cases}$

2. Υπολογίστε το $\int_{-3/2}^{5/2} [x]\,dx$.

3. Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι
$$0.60 < \int_{1/2}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx < 0.75.$$

4. Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι
$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt = 1.$$

5. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
(i) Τί συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$;
(ii) Τί συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$;

6. Έστω $0 \le a < b$ και $0 \le A < B$ και ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$ με $f(a) = A$, $f(b) = B$. Γνωρίζουμε ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B]$ με $f^{-1}(A) = a$, $f^{-1}(B) = b$. Αποδείξτε με γεωμετρικό τρόπο ότι
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_A^B f^{-1}(y)\,dy = Bb - Aa.$$

Πριν προχωρήσετε στην λύση των ασκήσεων 7-11, ας ξεκαθαρίσουμε κάποια πράγματα σχετικά με τον συμβολισμό $\sum$ για αθροίσματα.
Πολλές φορές συναντάμε αθροίσματα με n προσθετέους στα οποία η διάταξη των προσθετέων καθορίζεται από ένα δείκτη, ας πούμε k, ο οποίος παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από 1 μέχρι n: ο πρώτος προσθετέος, ο δεύτερος προσθετέος, κ.τ.λ., ο k-οστός προσθετέος, κ.τ.λ., ο n-οστός προσθετέος. Για παράδειγμα:
$$1 + 2 + \cdots + k + \cdots + n, \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots + n^2, \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{n}.$$
Τότε, για εξοικονόμηση χώρου, συνηθίζουμε να συμπτύσσουμε το άθροισμα χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\sum$ ως εξής: γράφουμε μόνο τον k-οστό προσθετέο και μπροστά από αυτόν το σύμβολο $\sum_{k=1}^{n}$ στο οποίο δηλώνουμε ότι ο δείκτης k διατρέχει όλες τις ακέραιες τιμές από 1 μέχρι n. Για παράδειγμα, τα προηγούμενα τρία αθροίσματα γράφονται:
$$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
Πιο γενικά, αν έχουμε ένα άθροισμα
$$a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n,$$
μπορούμε να το γράψουμε
$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$
(Μπορεί να συναντήσουμε και αθροίσματα $\sum_{k=m}^{n} a_k$ στα οποία ο δείκτης k διατρέχει όλες τις ακέραιες τιμές από m μέχρι n.)

Ας δούμε δύο απλούς κανόνες αλγεβρικού χειρισμού τέτοιων αθροισμάτων.
Παίρνουμε τον γνωστό τύπο αναδιάταξης των προσθετέων

$$(a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_k+\cdots+b_n) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_k+b_k)+\cdots+(a_n+b_n)$$

και με το σύμβολο $\sum$ τον γράφουμε

$$\textstyle\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

Επίσης, τον τύπο εξαγωγής κοινού παράγοντα

$$\lambda a_1 + \cdots + \lambda a_k + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n)$$

με το σύμβολο $\sum$ τον γράφουμε

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k.$$

Συνεχίζουμε με τις υπόλοιπες ασκήσεις.

7. Θεωρήστε διαμέριση του $[a, b]$ με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία για να αποδείξετε ότι

$$\textstyle\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

8. Θεωρήστε διαμέριση του $[a, b]$ με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία για να αποδείξετε ότι

$$\textstyle\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

   Θα χρειαστείτε τους τύπους

$$\cos t + \cos(2t) + \cos(3t) + \cdots + \cos(nt) = \big(\sin\tfrac{nt}{2}\cos\tfrac{(n+1)t}{2}\big)\big/\big(\sin\tfrac{t}{2}\big)$$

$$\sin t + \sin(2t) + \sin(3t) + \cdots + \sin(nt) = \big(\sin\tfrac{nt}{2}\sin\tfrac{(n+1)t}{2}\big)\big/\big(\sin\tfrac{t}{2}\big)$$

   οι οποίοι προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη τους με το $\sin\frac{t}{2}$.

9. Αν $0 < a < b, p \neq -1$, με την διαμέριση του παραδείγματος $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ αποδείξτε ότι

$$\textstyle\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.$$

10. Γράψτε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\tfrac{1}{n+1} + \cdots + \tfrac{1}{n+k} + \cdots + \tfrac{1}{n+n}\big)$$

   με την μορφή ολοκληρώματος ως εξής: γράψτε $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{1+(k/n)}\,\frac{1}{n} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ με κατάλληλη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 1]$, κατάλληλη διαμέριση $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$ του $[0, 1]$ και κατάλληλο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων.

11. Γράψτε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\tfrac{n}{n^2+1^2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+k^2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+n^2}\big)$$

   με την μορφή ολοκληρώματος κατάλληλης συνάρτησης σε κατάλληλο διάστημα.