Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Δωδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-4}, \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n/2}}{2^n}$$

και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

3. Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνουν οι σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

4. (i) Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**.
Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς αυτής και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός. Τι σχέση υπάρχει ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$;
(ii) Δείτε αν οι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}.$$

συγκλίνουν και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

5. Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{1+n^2} - n), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+(1/n)}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{1/n} - 1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right).$$

6. Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ συγκλίνει.

7. Εξετάστε με το ολοκληρωτικό κριτήριο τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n}.$$

Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους.

8. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-3)^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-e)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}.$$

9. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-\tfrac{n+1}{2n-1})^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{3n-1}{2n+1})^{2n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^3}{e^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{2^n}{(n+1)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-\tfrac{n}{n+1})^{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-e)^n(\tfrac{n}{n+1})^{n^2}.$$

10. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n^{3/4}},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n\log n},\qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n\log^2 n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log\big(1+\tfrac{1}{n}\big),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\tfrac{1}{n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(1-\cos\tfrac{1}{n}\big).$$

11. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{x^n}{2^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n^3x^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{2^nx^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n^nx^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^nn}{n^2+1}x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n^n}x^n,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{2^n}{n!}x^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^n}{(n+1)^n}x^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^n.$$

Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

12. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-2^n)x^n,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{n!}x^{2n},\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{\log^n a}{n!}x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(2n)!}x^{2n},\qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\tfrac{n-1}{n!}x^n,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{2n}x^{2n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{2n-1}x^{2n-1}.$$