

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα \arccos και \arcsin των $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$.
2. (i) Αποδείξτε ότι $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y \in [-1, 1]$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε y .
3. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $x = 2 \arccos(2y + 1), x = \arctan \frac{y+1}{2}$.
4. Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $y = \arcsin \frac{x+2}{x-1}$.
5. Ποιά είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = \arcsin x$; Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της; (Υπόδειξη: Δεν είναι η $x = \sin y$.)
6. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \arcsin(\sin x), y = \arctan(\tan x)$.
7. Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών $(\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}), (\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1} \frac{a-b}{2}), (n - 2[\frac{n}{2}]), (n - 3[\frac{n}{3}])$.
8. Υπολογίστε τον n -οστό όρο καθεμίας από τις τέσσερις ακολουθίες οι οποίες ορίζονται από τους (κοινούς και για τις τέσσερις) πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. (Υπόδειξη: Διαβάστε την άσκηση 2.1.4.)
9. Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες $(n^4/2^n)$ και $(8^n/n!)$ δεν είναι μονότονες αλλά και ότι είναι μονότονες από κάποια τιμή του δείκτη και πέρα. Είναι φραγμένες;
10. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας $\epsilon > 0$ και, υπολογίζοντας κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του ϵ , όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0, \quad \frac{2n+3}{3n+5} \rightarrow \frac{2}{3}, \quad \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{2^n+3n} \rightarrow 0.$$