Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{n-(n+3)^2-7n\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+1)^2} \to -1, \qquad \frac{5^n-3^{n+7}}{2^{n-1}-5^{n+2}} \to -\frac{1}{25}, \qquad \frac{2+\log(n\sqrt{n})}{7-2\log n} \to -\frac{3}{4},$$

$$\sqrt{n^2+n}-n \to \frac{1}{2}, \qquad \left(\frac{n(n+1)}{n+2}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)^3 \to -1,$$

$$\frac{(1+2+2^2+\cdots+2^n)^2}{1+4+4^2+\cdots+4^n} \to 3, \qquad \frac{1}{1+2}\,\frac{2}{2+2}\,\frac{3}{3+2}\cdots\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n}{n+2} \to 0,$$

$$3n-2n\sin n \to +\infty, \qquad \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1, \qquad \sqrt[n]{n^2+3n+1} \to 1,$$

$$\sqrt[n]{2^n+3^n} \to 3, \qquad (1-\tfrac{1}{n^2})^n \to 1, \qquad (1-\tfrac{1}{n})^{n^2} \to 0,$$

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n \to e, \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}, \qquad \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

2. Αν $|x_n| \to 0$ αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

3. Έστω $x_n \neq 1$ για κάθε n και $x \neq 1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{1+x_n}{1-x_n} \to \frac{1+x}{1-x}$.

4. Αν $n+1 \leq nx_n \leq n+x_n+2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.

5. Αν $n^2x_n^2-2n(n-1)x_n+n^2 \leq 2n+3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.

6. Έστω $3x_{n+1} = x_n^2+2$ για κάθε n.
   (i) Αν $1 < x_1 < 2$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to 1$.
   (ii) Αν $x_1 > 2$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και $x_n \to +\infty$.

7. Έστω $x_{n+1} = 1+\frac{6}{x_n}$ για κάθε n.
   (i) Αν $0 < x_1 < 3$ αποδείξτε ότι η υπακολουθία (x_{2k-1}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η (x_{2k}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \to 3$.
   (ii) Τί γίνεται αν $x_1 > 3$;