

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Ποιά είναι τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων $\{-1\}$, $(-1, 4]$, $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup \{7\}$, \mathbb{N} , $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
2. Ποιά από τα παρακάτω όρια έχουν νόημα; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \log \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cos x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \sin x$. Προσέξτε: δεν εξετάζουμε το αν υπάρχουν τα όρια αυτά ή το ποιά είναι η τιμή τους. Εξετάζουμε, απλώς, αν έχουν νόημα.
3. Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4) = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \log x = \log 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{12}-1}{x^2-1} = 6, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{x^2-1} = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x-2e^{2x}+2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \log^2 x - 3 \log x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{1-e^x} = \mp\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(7x)}{\log(2x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \left(\frac{4}{\log^2 x} - \frac{1}{\log^3 x} \right) = \mp\infty.$$

5. Έστω $f : (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) \neq -1$ για κάθε $x > 3$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{f(x)+1} = 1$.
6. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = 0$.
7. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες) της $y = \frac{x^3+x-2}{x^2-1}$.
8. Αν $(x-1)f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο 1.