

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Γράψτε σε μορφή ορίου
(i) την στιγμιαία επιτάχυνση οχήματος το οποίο κινείται σε ευθύ δρόμο.
(ii) την στιγμιαία ταχύτητα και την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ενός οχήματος το οποίο κινείται σε κυκλικό δρόμο και βρείτε την σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές ταχύτητες.
Κατόπιν γράψτε τα προηγούμενα όρια σε μορφή παραγώγου.
2. Βρείτε τα a, b ώστε η συνάρτηση $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{αν } x < 1 \\ bx + 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ να έχει παράγωγο στο 1.
3. Βρείτε την σχέση ανάμεσα στα a, b η οποία είναι ισοδύναμη με το να εφάπτονται σε κάποιο κοινό τους σημείο τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = ax^2 + 3$ και $y = x^2 + bx + 1$.
4. Αποδείξτε ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στην καμπύλη $xy = a$ ($a > 0$) το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x -άξονα και τον y -άξονα διχοτομείται από το σημείο επαφής (της εφαπτόμενης ευθείας με την καμπύλη). Μπορείτε να θεωρήσετε οποιαδήποτε από τις x, y ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
5. (i) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε κάθε σημείο της καμπύλης $y^6 = x^5$. Η λύση είναι απλούστερη αν θεωρήσετε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως εξαρτημένη μεταβλητή. Αν θεωρήσετε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή τότε πρέπει να θεωρήσετε την καμπύλη ως ένωση των γραφημάτων των $y = x^{5/6}$ και $y = -x^{5/6}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να προσέξετε ιδιαίτερος το σημείο $(0, 0)$ της καμπύλης.
(ii) Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την καμπύλη $y^4 = x^5$. Μήπως τώρα υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$;
6. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων:
$$y = \sin(\arcsin x), \quad y = \cos(\arcsin x), \quad y = \arcsin(\sin x), \quad y = \arcsin(\cos x).$$

(Οι δύο πρώτες έχουν πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και οι δύο τελευταίες το $(-\infty, +\infty)$.)
Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων με δύο τρόπους: με τον κανόνα αλυσίδας καθώς και με την βοήθεια των αντίστοιχων γραφημάτων.
7. Θεωρήστε την συνάρτηση $y = \begin{cases} x^a \sin(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.
Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ αν και μόνο αν $a > 0$ και ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ αν και μόνο αν $a > 1$. Αποδείξτε ότι η παράγωγος είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ αν και μόνο αν $a > 2$.
8. Αν η $y = r(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$ αν και μόνο αν οι βαθμοί των πολωνύμων στον αριθμητή και στον παρονομαστή της συνάρτησης είναι ίσοι.
9. Στο xy -επίπεδο ένα όχημα με ζεύγος συντεταγμένων (x, y) κινείται (με μη-μηδενική ταχύτητα) πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^3 - y = 2x^3 - 2x$. Αποδείξτε ότι οι θέσεις του οχήματος στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής του y (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής του x (ως προς τον χρόνο) είναι οι: $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(-1, -1)$.
10. Μία μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στην πλευρά Ox και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά Oy μίας ορθής γωνίας.
Αν το άκρο x απομακρύνεται από την κορυφή O της γωνίας με σταθερή ταχύτητα v βρείτε

την ταχύτητα με την οποία το άκρο y πλησιάζει την κορυφή O . Ειδικότερα, ποιά είναι η ταχύτητα του άκρου y όταν το άκρο x ξεκινάει από την κορυφή O καθώς και όταν το άκρο x φτάνει στην θέση l .

Βρείτε επίσης τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x .

11. Παρατηρήστε ότι τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x-1}$$

είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και ως τέτοιες υπολογίστε τα. Βάσει των ορίων αυτών αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x^a - 1} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - x^b}{x-1} = a - b, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a - b.$$

12. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ και $0 < \xi < +\infty$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ αποδείξτε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x)}{f(\xi)} \right)^{1/(x-\xi)} = e^{f'(\xi)/f(\xi)}, \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{f(x)}{f(\xi)} \right)^{1/(\log x - \log \xi)} = e^{\xi f'(\xi)/f(\xi)}.$$