Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε
(i) $a < \xi < b$ και $e^b - e^a = (b-a)e^\xi$.
(ii) $a < \xi < b$ και $\cos b - \cos a = -(e^b - e^a)e^{-\xi} \sin \xi$.

2. (i) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3/3 = \sin x - x \cos x$ έχει ακριβώς μία λύση.
(ii) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3/6 = \sin x - x \cos x$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.

3. Θεωρήστε την $y = 2\sqrt[3]{x^2} - 1 = 2|x|^{2/3} - 1$ και παρατηρήστε ότι έχει την ίδια τιμή 1 στα σημεία 1 και -1. Το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle είναι ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης. Υπάρχει τέτοιο ξ και ποιό είναι το πρόβλημα;

4. Έστω f συνεχής στο $[-1, 3]$, $f(3) = -7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq -2$ στο $(-1, 3)$.
(i) Αποδείξτε ότι $f(-1) \leq 1$.
(ii) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $f(-1) = 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = -2x - 1$ στο $[-1, 3]$.

5. Μελετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σχετικά με την μονοτονία, την κυρτότητα και τα ακρότατά τους.
(i) $f(x) = x^2(x-1)^2$.
(ii) $f(x) = 1/\log x$.
(iii) $f(x) = |x|(x-1)$ στο διάστημα $[-1, 2]$.

6. Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

7. Έστω οποιαδήποτε ευθεία l του xy-επιπέδου με εξίσωση $ax + by = c$, όπου ένα τουλάχιστον από τα a, b είναι $\neq 0$, και οποιοδήποτε σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Η απόσταση του M από την l είναι η ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l. Αποδείξτε ότι η απόσταση του M από την l δίνεται από τον τύπο
$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2 + b^2)^{1/2}}.$$

8. Λυγίζουμε μία λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε την ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;

9. Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r. Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μία βάση του πάνω στην βάση του κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;

10. Έστω ότι η f έχει δεύτερη παράγωγο στο (a, b) και ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ στο (a, b). Αν στο (a, b) περιέχονται δύο λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x) = 0$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις.

11. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1, x_0, x_2 \in I$ με $x_1 < x_0 < x_2$. Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται *πάνω* στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ αποδείξτε ότι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο $[x_1, x_2]$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

12. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα ή κοιλότητα σχετικών συναρτήσεων αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:
(i) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \leq \frac{x_1^a+x_2^a}{2}$ για $0 \leq x_1 < x_2$ και $a \geq 1$.
(ii) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \geq \frac{x_1^a+x_2^a}{2}$ για $0 \leq x_1 < x_2$ και $0 < a \leq 1$.
(iii) $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ για $x_1 < x_2$.
(iv) $\log \frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\log x_1+\log x_2}{2}$ για $0 < x_1 < x_2$.

13. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του l' Hopitâl, βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arctan x}, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 1+} \log x \log(x-1), \quad \lim_{x\to 0+} x^{x^x-1}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}.$$

14. Μπορείτε να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl; Μήπως το όριο αυτό υπολογίζεται πολύ εύκολα χωρίς αναφορά στον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl;