

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Τελικό διαγώνισμα. Περίοδος Ιανουαρίου. Τμήμα Α.

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι σαφείς και σύντομες. Το διαγώνισμα διαρκεί τρεις ώρες και μπορείτε να αποχωρήσετε μετά από μία ώρα από την έναρξη.

1. Στον ορισμό του $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$, ποιό είναι το μεγαλύτερο κατάλληλο δ για το $\epsilon = 1/2$;
2. Πείτε για καθένα από τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - 3x^2}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{e^x-1}$ αν έχει νόημα ή αν υπάρχει ή αν δεν υπάρχει.
3. Χωρίς να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης της $\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}$ στο $(0, +\infty)$, μελετήστε την ως προς το πεδίο ορισμού, την μονοτονία και την συνέχεια.
4. Ποιές από τις ακολουθίες $x_n = \left(\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}\right)^n$ και $y_n = \log \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$ έχουν όριο;
5. Αν $0 < x_1 < 3$ και $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μελετήστε την ακολουθία (x_n) ως προς την γνήσια μονοτονία και το όριό της.
6. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $x^5 + 5x^4 + 3$.
7. Υπολογίστε τα $\int x \cos(x^2) dx$, $\int x \log x dx$ και $\int \frac{1}{x(x+2)} dx$.
8. Εξετάστε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{1/2}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.
9. Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^{1/2}} x^n$.
10. Υπολογίστε τα $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$.

Καλή επιτυχία!

Μ. Παπαδημητράκης.