Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις πρώτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Για καθεμία από τις ανισότητες*

$$|x+1|>2, \quad |x-1|\le |x+1|, \quad \tfrac{x}{x+2}>\tfrac{x+3}{3x+1}, \quad \tfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\le 0$$

γράψτε ως διάστημα ή ως ένωση διαστημάτων το σύνολο των x για τα οποία αυτή είναι αληθής.

Λύση: (i) Η ανισότητα $|x+1|>2$ λέει ότι η απόσταση του x από το -1 είναι μεγαλύτερη από 2. Άρα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

(ii) Η ανισότητα $|x-1|\le|x+1|$ λέει ότι η απόσταση του x από το 1 είναι μικρότερη ή ίση της απόστασης του x από το -1. Άρα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $[0,+\infty)$.

(iii) Θα χειριστούμε την ανισότητα $\frac{x}{x+2}>\frac{x+3}{3x+1}$ αλγεβρικά. Δεν θα πολλαπλασιάσουμε με το γινόμενο των παρονομαστών για να αποφύγουμε τις περιπτώσεις με το πρόσημό του.

$$\begin{aligned}\tfrac{x}{x+2}>\tfrac{x+3}{3x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{x}{x+2}-\tfrac{x+3}{3x+1}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2(x^2-2x-3)}{(x+2)(3x+1)}>0\\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{2(x-3)(x+1)}{(x+2)(3x+1)}>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x+1)(x+2)(3x+1)>0.\end{aligned}$$

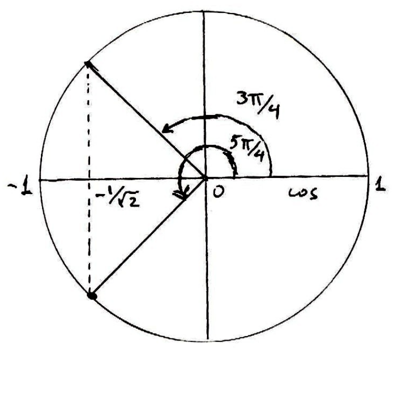
Η πολυωνυμική παράσταση στην τελευταία ανισότητα μηδενίζεται στα $-2,-1,-\frac{1}{3},3$. Άρα η ανισότητα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $(-\infty,-2)\cup(-1,-\frac{1}{3})\cup(3,+\infty)$.

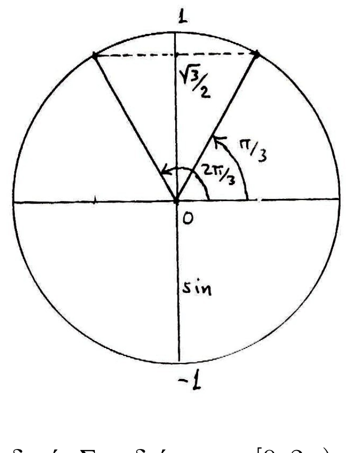
(iv) Θα χειριστούμε και την ανισότητα $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\le 0$ αλγεβρικά. Αυτή η ανισότητα είναι πιο απλή από την προηγούμενη. Κατ' αρχάς πρέπει να είναι $x\ne 2$ και άρα $(x-2)^2>0$. Άρα

$$\tfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3)\le 0 \text{ και } x\ne 2.$$

Άρα η ανισότητα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $[1,2)\cup(2,3]$.

2. *Λύστε τις εξισώσεις* $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot x=-1$, $\tan x=-\sqrt{3}$.

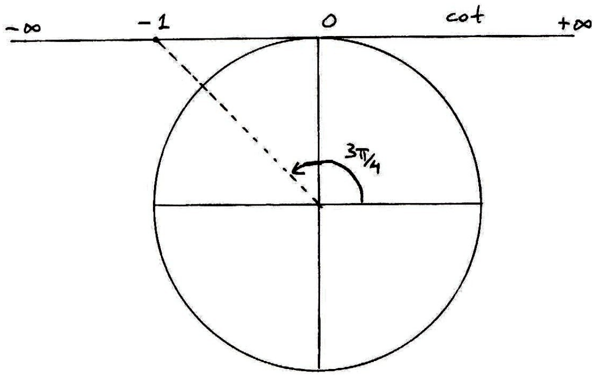


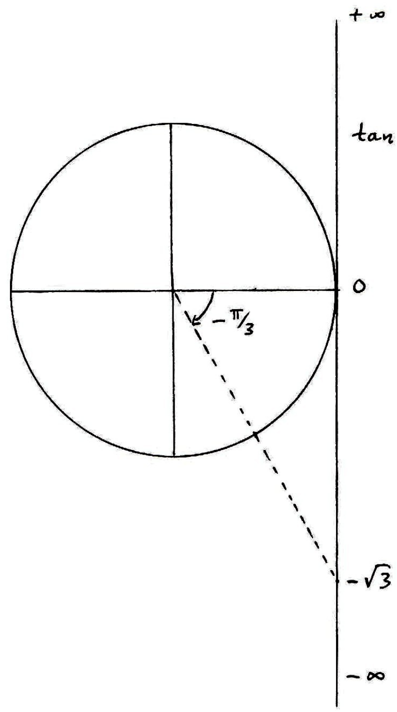


Λύση: (i) Η συνάρτηση $y=\cos x$ είναι 2π-περιοδική. Στο διάστημα $[0,2\pi)$ η εξίσωση $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ έχει δύο λύσεις: $x=\frac{3\pi}{4}$ και $x=2\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ για $k\in\mathbb{Z}$ και τις $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ για $k\in\mathbb{Z}$.

(ii) Η συνάρτηση $y=\sin x$ είναι 2π-περιοδική. Στο διάστημα $[0,2\pi)$ η εξίσωση $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει δύο λύσεις: $x=\frac{\pi}{3}$ και $x=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ για $k\in\mathbb{Z}$ και τις $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ για $k\in\mathbb{Z}$.

(iii) Η συνάρτηση $y=\cot x$ είναι π-περιοδική. Στο διάστημα $(0,\pi)$ η εξίσωση $\cot x=-1$ έχει μία λύση: $x=\frac{3\pi}{4}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ για $k\in\mathbb{Z}$.





(iv) Η συνάρτηση $y = \tan x$ είναι π-περιοδική. Στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ η εξίσωση $\tan x = -\sqrt{3}$ έχει μία λύση: $x = -\frac{\pi}{3}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$.

3. *Αποδείξτε ότι* $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ *και* $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$.
Λύση:

$$\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos x.$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y) &= \tfrac{1}{2}(\cos x\cos y + \sin x \sin y - \cos x \cos y + \sin x \sin y)\\ &= \sin x \sin y.\end{aligned}$$

4. *Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων* $y = \frac{2x-1}{x+4}$, $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $y = \log_{10} x + 4$, $y = e^{2x} + 2e^x + 3$.
Λύση: (i) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{2x-1}{x+4}$ είναι το $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $y = \frac{2x-1}{x+4}$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το $x \neq -4$ την εξίσωση:

$$\frac{2x-1}{x+4} = y \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = yx + 4y \quad \Leftrightarrow \quad (2-y)x = 1 + 4y.$$

Αν $y = 2$, η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $y \neq 2$, η εξίσωση έχει την λύση $x = \frac{1+4y}{2-y}$ και ελέγχουμε εύκολα ότι αυτή η λύση είναι $\neq -4$.
Άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
(ii) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ είναι το $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το $x \neq \pm 1$ την εξίσωση:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = yx^2 - y \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)x^2 = y + 1.$$

Αν $y = 1$, η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $y \neq 1$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 = \frac{y+1}{y-1}.$$

Αν $\frac{y+1}{y-1} < 0$, η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $\frac{y+1}{y-1} \geq 0$, η εξίσωση έχει τις λύσεις $x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$ και ελέγχουμε εύκολα ότι αυτές οι λύσεις είναι $\neq \pm 1$.
Άρα το σύνολο τιμών αποτελείται από τα y για τα οποία ισχύει $\frac{y+1}{y-1} \geq 0$ ή, ισοδύναμα, $(y+1)(y-1) > 0$ και $y \neq 1$. Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.
(iii) Το πεδίο ορισμού της $y = \log_{10} x + 4$ είναι το $(0, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $y = \log_{10} x + 4$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το $x > 0$ την εξίσωση:

$$\log_{10} x + 4 = y \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10} x = y - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^{y-4}.$$

Η λύση $x = 10^{y-4}$ είναι προφανώς > 0 για κάθε y. Άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(iv) Το πεδίο ορισμού της $y = e^{2x} + 2e^x + 3$ είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $y = e^{2x} + 2e^x + 3$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το x την εξίσωση:

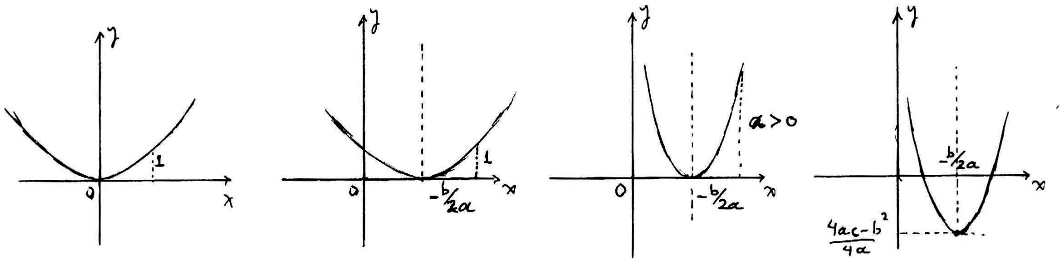
$$e^{2x} + 2e^x + 3 = y \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + 2e^x + 1 = y - 2 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x + 1)^2 = y - 2.$$

Αν $y < 2$, η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $y \geq 2$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

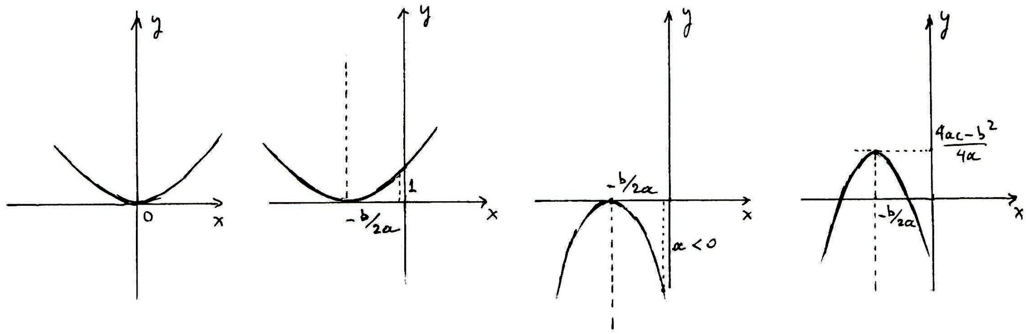
$$e^x + 1 = \pm\sqrt{y-2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x + 1 = \sqrt{y-2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \sqrt{y-2} - 1.$$

Αν $\sqrt{y-2} \leq 1$, η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $\sqrt{y-2} > 1$, η εξίσωση έχει την λύση $x = \log(\sqrt{y-2} - 1)$.
Άρα το σύνολο τιμών αποτελείται από τα y για τα οποία ισχύει $\sqrt{y-2} > 1$ ή, ισοδύναμα, $y - 2 > 1$. Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $(3, +\infty)$.

5. *Έστω αριθμοί a, b, c με $a \neq 0$. Βάσει του γραφήματος της $y = x^2$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = ax^2 + bx + c$. Σε ποιά περίπτωση είναι η συνάρτηση άνω φραγμένη και σε ποιά περίπτωση είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$; Ποιό είναι το σύνολο τιμών της; Ειδικότερα, σχεδιάστε το γράφημα της $y = -4x^2 + 4 + 1$ και από αυτό να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.*
Λύση: (i) Γράφουμε
$$ax^2 + bx + c = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a}.$$
Ξεκινάμε από το γράφημα της $y = x^2$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$, είναι κάτω φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή 0.
Μεταφέρουμε οριζόντια το γράφημα της $y = x^2$ κατά $-\frac{b}{2a}$ και βρίσκουμε το γράφημα της $y = (x + \frac{b}{2a})^2$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$, είναι κάτω φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή 0.
Πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του γραφήματος της $y = (x + \frac{b}{2a})^2$ με a και βρίσκουμε το γράφημα της $y = a(x + \frac{b}{2a})^2$. Τώρα έχουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $a > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$, είναι κάτω φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή 0.

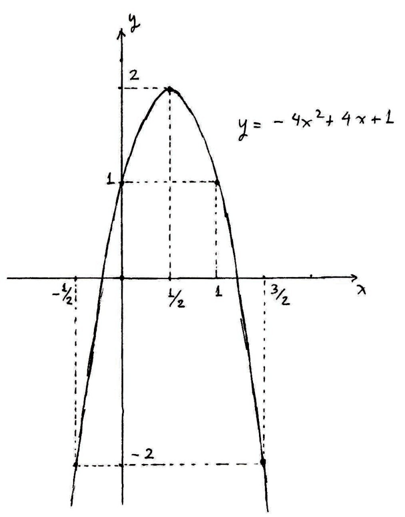


Αν $a < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 0]$, είναι άνω φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή 0.



Μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά $\frac{4ac-b^2}{4a}$ το τελευταίο γράφημα και βρίσκουμε το γράφημα της $y = ax^2 + bx + c$. Οπότε πάλι έχουμε δύο αντίστοιχες περιπτώσεις.
Αν $a > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$, είναι κάτω φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή $\frac{4ac-b^2}{4a}$.
Αν $a < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$, είναι άνω φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή $\frac{4ac-b^2}{4a}$.
(ii) Στην περίπτωση της $y = -4x^2 + 4x + 1$ έχουμε

$$y = -4x^2 + 4x + 1 = -4(x - \tfrac{1}{2})^2 + 2.$$



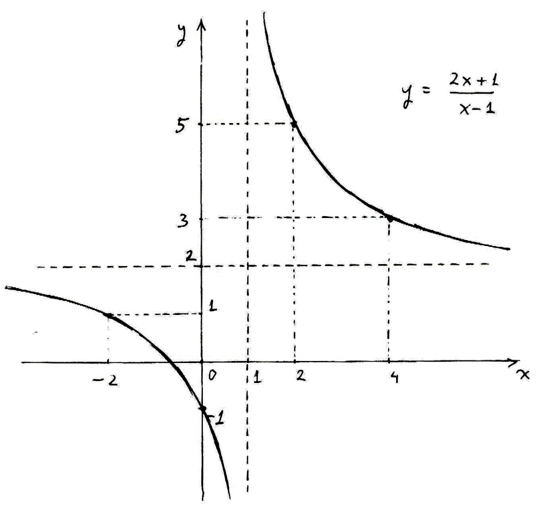
Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 2]$, είναι άνω φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή 2.

6. *Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$. Βάσει του γραφήματος της $y = \frac{1}{x}$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Ειδικότερα, σχεδιάστε το γράφημα της $y = \frac{2x+1}{x-1}$ και από αυτό να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.*

   Λύση: (i) Γράφουμε

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Ξεκινάμε από το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Μεταφέρουμε οριζόντια το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$ κατά $-\frac{d}{c}$ και βρίσκουμε το γράφημα της $y = \frac{1}{x+\frac{d}{c}}$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του γραφήματος της $y = \frac{1}{x+\frac{d}{c}}$ με $\frac{bc-ad}{c^2}$ και βρίσκουμε το γράφημα της $y = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}}$. Τώρα έχουμε τρεις περιπτώσεις.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} = 0$, η συνάρτηση είναι σταθερή 0 στο $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$.
Μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά $\frac{a}{c}$ το τελευταίο γράφημα και βρίσκουμε το γράφημα της $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Οπότε πάλι έχουμε τρεις αντίστοιχες περιπτώσεις.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} = 0$, η συνάρτηση είναι σταθερή $\frac{a}{c}$ στο $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, \frac{a}{c})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(\frac{a}{c}, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(\frac{a}{c}, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, \frac{a}{c})$.



(ii) Στην περίπτωση της $y = \frac{2x+1}{x-1}$ έχουμε

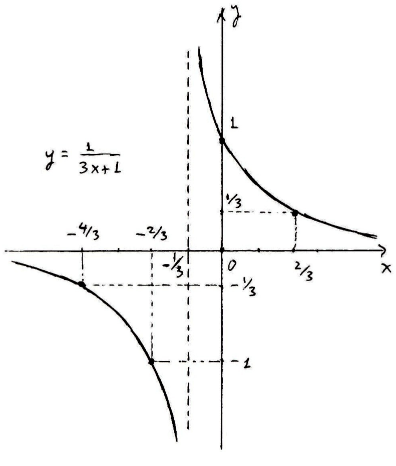
$$y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2.$$

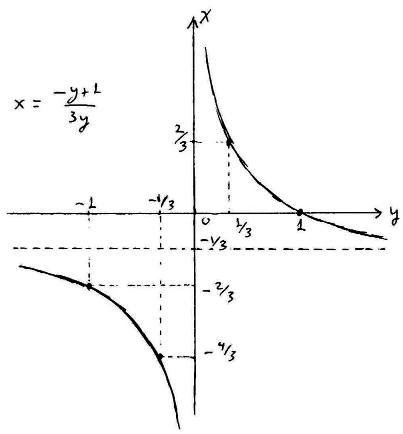
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(2, +\infty)$.

7. *Θεωρήστε την* $y = \frac{1}{3x+1}$. *Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, καθώς και το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.*

   Λύση: Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{1}{3x+1}$ είναι το $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{3})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ και, παρά το ότι δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$, είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ και άρα είναι αντιστρέψιμη.
   Το γράφημα της $y = \frac{1}{3x+1}$ μπορούμε να το σχεδιάσουμε κατά το πρότυπο της άσκησης 6: γράφουμε

$$\frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+\frac{1}{3}}.$$





Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{3})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της αρχικής συνάρτησης) και σύνολο τιμών το $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ (το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης).
Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει όταν λύσουμε την εξίσωση $y = \frac{1}{3x+1}$ με δοσμένο y και άγνωστο x:

$$\frac{1}{3x+1} = y \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3yx + y \quad \Leftrightarrow \quad 3yx = -y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-y+1}{3y}.$$

Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \frac{-y+1}{3y}$. Το γράφημά της το σχεδιάζουμε πάλι βάσει της άσκησης 6: γράφουμε

$$\frac{-y+1}{3y} = \frac{1}{3}\frac{1}{y} - \frac{1}{3}.$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, -\frac{1}{3})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{1}{3}, +\infty)$.

8. *Θεωρήστε την* $y = x^2 + 2x - 1$. *Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση; Χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, "μοιράστε" την σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις, βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις τους, τα πεδία ορισμού τους και τα*

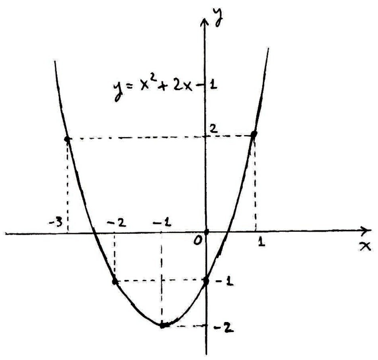
σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.
Λύση: Το πεδίο ορισμού της $y = x^2 + 2x - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημά της κατά το πρότυπο της άσκησης 5: γράφουμε

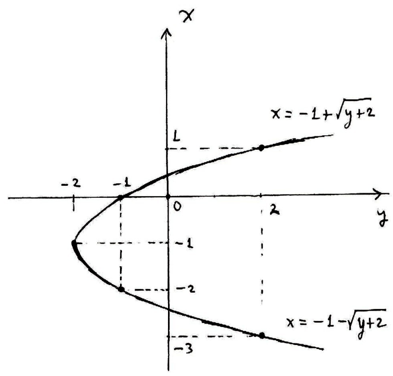
$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2.$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ με σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$.
Αν περιορίσουμε την $y = x^2+2x-1 = (x+1)^2-2$ στο $(-\infty, -1]$, τότε είναι αντιστρέψιμη (ως γνησίως φθίνουσα) με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1]$ και σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με πεδίο ορισμού το $[-2, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, -1]$. Ο τύπος της προκύπτει αφού λύσουμε την $y = (x + 1)^2 - 2$ ως εξίσωση με δοσμένο $y \geq -2$ και άγνωστο $x \leq -1$:

$$(x + 1)^2 - 2 = y \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 = y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{y + 2}.$$

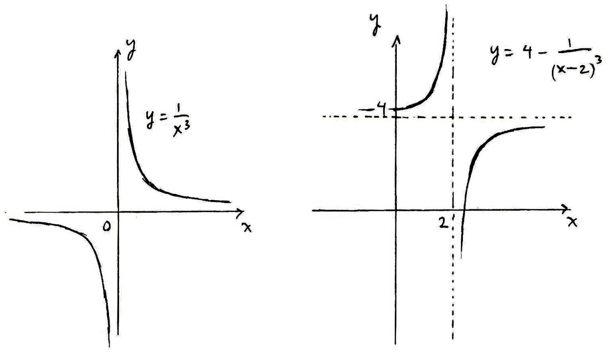
Από τις δύο λύσεις εκείνη που ανήκει στο $(-\infty, -1]$ είναι η $x = -1 - \sqrt{y + 2}$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = -1 - \sqrt{y + 2}$.



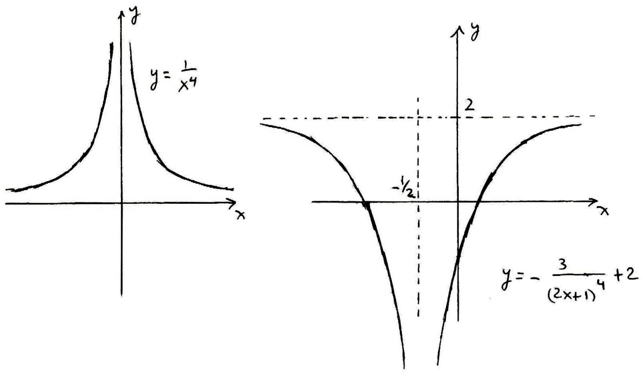


Αν περιορίσουμε την $y = x^2+2x-1 = (x+1)^2-2$ στο $[-1, +\infty)$, τότε είναι αντιστρέψιμη (ως γνησίως αύξουσα) με πεδίο ορισμού το $[-1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το $[-2, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$. Ο τύπος της προκύπτει όπως πριν αφού λύσουμε την $y = (x + 1)^2 - 2$ ως εξίσωση με δοσμένο $y \geq -2$ και άγνωστο $x \geq -1$. Από τις δύο λύσεις που βρήκαμε προηγουμένως εκείνη που ανήκει στο $[-1, +\infty)$ είναι η $x = -1 + \sqrt{y + 2}$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = -1 + \sqrt{y + 2}$.

9. *Βάσει των γραφημάτων των $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^4}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = 4 - \frac{1}{(x-2)^3}$, $y = -\frac{3}{(2x+1)^4} + 2$. Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.*
Λύση: (i) Ξεκινάμε με το γράφημα της $y = \frac{1}{x^3}$ και το μεταφέρουμε οριζόντια κατά 2. Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με -1 (δηλαδή βρίσκουμε το συμμετρικό του ως προς τον x-άξονα) και τέλος μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα κατακόρυφα κατά 4. Έτσι προκύπτει το γράφημα της $y = 4 - \frac{1}{(x-2)^3}$.
Από το γράφημα φαίνεται καθαρά ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2)$ με σύνολο τιμών το $(4, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 4)$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

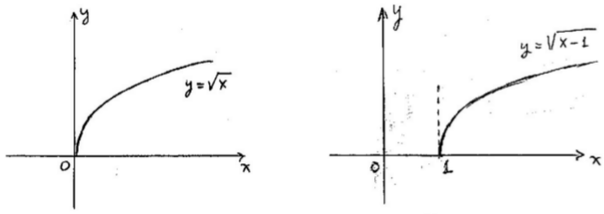


(ii) Ξεκινάμε με το γράφημα της $y = \frac{1}{x^4}$ και το μεταφέρουμε οριζόντια κατά -1. Πολλαπλασιάζουμε τις x-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με $\frac{1}{2}$. Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με -3 και τέλος μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα κατακόρυφα κατά 2. Έτσι προκύπτει το γράφημα της $y = -\frac{3}{(2x+1)^4} + 2$. Από το γράφημα διακρίνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{2})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 2)$.

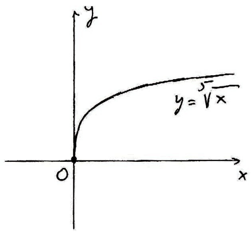


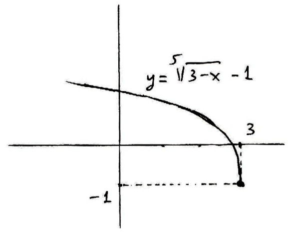
10. *Βάσει των γραφημάτων των $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \sqrt{x-1}$, $y = \sqrt[5]{3-x} - 1$. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους;*

Λύση: Μεταφέρουμε οριζόντια κατά 1 το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ και προκύπτει το γράφημα της $y = \sqrt{x-1}$. Από το γράφημα βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

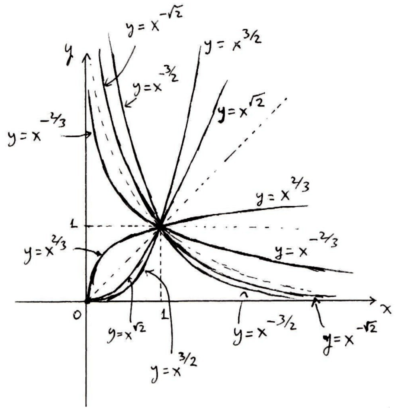


(ii) Ξεκινάμε με το γράφημα της $y = \sqrt[5]{x}$ και το μεταφέρουμε οριζόντια κατά -3. Πολλαπλασιάζουμε τις x-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με -1 (δηλαδή βρίσκουμε το συμμετρικό του ως προς τον y-άξονα). Κατόπιν μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα κατακόρυφα κατά -1. Έτσι προκύπτει το γράφημα της $y = \sqrt[5]{3-x} - 1$. Από το γράφημα διακρίνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ με σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$.





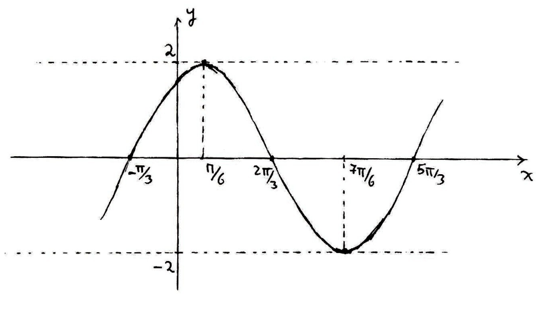
11. *Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τα γραφήματα των* $y = x^{2/3}$, $y = x^{-2/3}$, $y = x^{3/2}$, $y = x^{-3/2}$, $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{-\sqrt{2}}$.
Λύση:



12. *Δείτε την άσκηση 1.4.4 και σχεδιάστε το γράφημα της* $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x$.
Λύση: Η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συντελεστών των $\cos x$, $\sin x$ είναι $((\sqrt{3})^2 + 1^2)^{1/2} = 2$. Άρα γράφουμε:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\cos x + \tfrac{1}{2}\,\sin x\big) = 2\big(\sin\tfrac{\pi}{3}\,\cos x + \cos\tfrac{\pi}{3}\,\sin x\big) = 2\sin\big(x + \tfrac{\pi}{3}\big).$$

Άρα για να βρούμε το γράφημα της $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ ξεκινάμε με το γράφημα της $y = \sin x$, το μεταφέρουμε οριζόντια κατά $-\frac{\pi}{3}$, και πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με το 2:



13. *Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των* $y = \sqrt{\sin x}$, $y = \frac{1}{1+\sin x}$.
Λύση: (i) Το πεδίο ορισμού της $y = \sqrt{\sin x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ για $k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών αποτελείται από τα y για τα οποία η εξίσωση $\sqrt{\sin x} = y$ με άγνωστο το x έχει μία τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αν $y < 0$ ή αν $y > 1$, η εξίσωση $\sqrt{\sin x} = y$ δεν έχει λύση. Αν $0 \le y \le 1$, έχουμε

$$\sqrt{\sin x} = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = y^2.$$

Επειδή $0 \leq y^2 \leq 1$, η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $[0, \pi]$ και άρα υπάρχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ για $k \in \mathbb{Z}$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[0, 1]$.

(ii) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{1}{1+\sin x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών αποτελείται από τα y για τα οποία η εξίσωση $\frac{1}{1+\sin x} = y$ με άγνωστο το x έχει μία τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αν $y = 0$, η εξίσωση $\frac{1}{1+\sin x} = y$ δεν έχει λύση. Αν $y \neq 0$, έχουμε

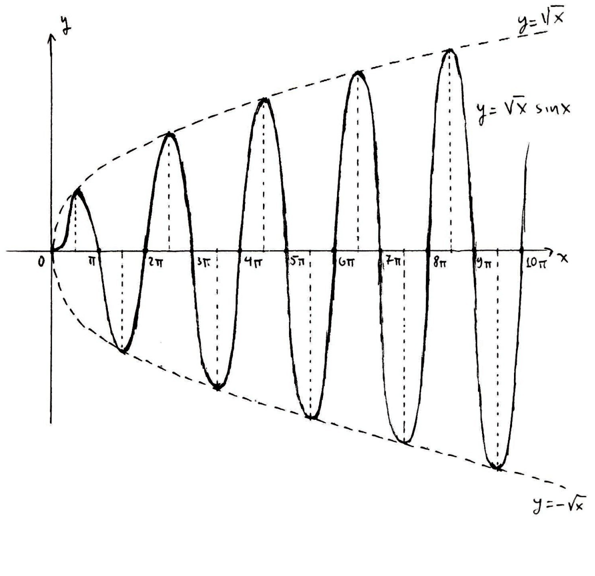
$$\tfrac{1}{1+\sin x} = y \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sin x = \tfrac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \tfrac{1-y}{y}.$$

Προφανώς η εξίσωση αυτή έχει λύση αν και μόνο αν $\frac{1-y}{y} \in [-1, 1]$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\frac{1-y}{y} \neq -1$ για κάθε $y \neq 0$. Άρα η εξίσωση έχει λύση αν και μόνο αν $\frac{1-y}{y} \in (-1, 1]$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$-1 < \tfrac{1-y}{y} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \tfrac{1}{2}.$$

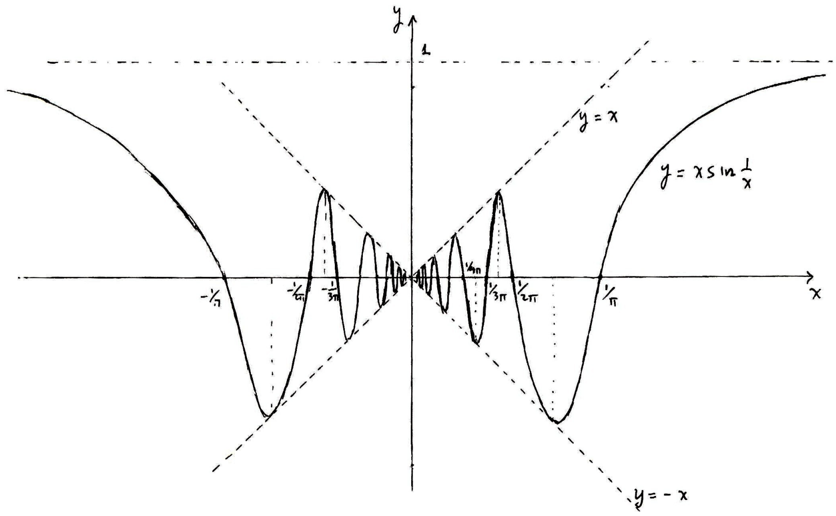
Άρα όταν $y < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{1-y}{y} \notin [-1, 1]$ και άρα η εξίσωση $\sin x = \frac{1-y}{y}$ δεν έχει λύση. Και όταν $y \geq \frac{1}{2}$ τότε $\frac{1-y}{y} \in (-1, 1]$ και άρα η εξίσωση $\sin x = \frac{1-y}{y}$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$.
Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $y = \frac{1}{1+\sin x}$ είναι το $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

14. *Συμβουλευόμενοι τις ασκήσεις 3.9.6 και 3.9.7, σχεδιάστε τα γραφήματα των* $y = \sqrt{x}\,\sin x$, $y = x \sin \frac{1}{x}$.
Λύση: (i) Ισχύει $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\,\sin x \leq \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Άρα το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ βρίσκεται ανάμεσα στα γραφήματα των $y = -\sqrt{x}$ και $y = \sqrt{x}$. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 1$, δηλαδή στα $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ "ακουμπά" το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = -1$, δηλαδή στα $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ "ακουμπά" το γράφημα της $y = -\sqrt{x}$. Σε κάθε άλλο $x > 0$ το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ βρίσκεται γνησίως ανάμεσα στα γραφήματα των $y = -\sqrt{x}$ και $y = \sqrt{x}$. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 0$, δηλαδή στα $x = k\pi$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ τέμνει τον x-άξονα. Προσέχοντας πώς όλα αυτά τα σημεία (οι λύσεις των τριών εξισώσεων $\sin x = 1$, $\sin x = -1$ και $\sin x = 0$) διαδέχονται το ένα το άλλο, σχεδιάζουμε το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ ως εξής:



Αν προσέξετε την μορφή του γραφήματος κοντά στο 0 θα παρατηρήσετε ότι εφάπτεται στον x-άξονα. Αυτό δικαιολογείται με γνώσεις τις οποίες θα αποκτήσουμε αργότερα: η παράγωγος της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ στο 0 είναι ίση με 0.

(ii) Κατ' αρχάς θεωρούμε την $y = x\sin\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$. Λόγω της ανισότητας $-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$ για $x > 0$, το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = -x$ και $y = x$. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x} = 1$, δηλαδή στα $x = \frac{1}{(\pi/2)+k2\pi}$ με $k = 0,1,2,\dots$, το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ "ακουμπά" την ευθεία $y = x$ και στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x} = -1$, δηλαδή στα $x = \frac{1}{(3\pi/2)+k2\pi}$ με $k = 0,1,2,\dots$, το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ "ακουμπά" την ευθεία $y = -x$. Σε κάθε άλλο $x > 0$ το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ βρίσκεται γνησίως ανάμεσα στις ευθείες $y = -x$ και $y = x$. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x} = 0$, δηλαδή στα $x = \frac{1}{k\pi}$ με $k = 1,2,\dots$, το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ τέμνει τον x-άξονα. Όλα αυτά τα σημεία (οι λύσεις των τριών εξισώσεων $\sin\frac{1}{x} = 1$, $\sin\frac{1}{x} = -1$ και $\sin\frac{1}{x} = 0$) διαδέχονται το ένα το άλλο και αποτελούν τρεις ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν στο 0. Αυτές οι παρατηρήσεις μας βοηθούν να σχεδιάσουμε το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(0,+\infty)$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το ότι η $y = x\sin\frac{1}{x}$ είναι άρτια, σχεδιάζουμε και το γράφημά της το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty,0)$: είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς τον y-άξονα.



Ένα ακόμη βοηθητικό στοιχείο είναι η ανισότητα $\sin\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ για $x > 0$ (λόγω της $\sin t < t$ για $t > 0$). Από αυτήν παίρνουμε ότι $x\sin\frac{1}{x} < 1$ για $x > 0$, οπότε το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ βρίσκεται κάτω από την οριζόντια ευθεία $y = 1$. Μάλιστα, θα δούμε αργότερα ότι $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$, οπότε η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ του γραφήματος της $y = x\sin\frac{1}{x}$. Παρόμοιες παρατηρήσεις έχουμε και για το συμμετρικό κομμάτι του γραφήματος (δηλαδή για $x < 0$).