Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις δέκατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Υπολογίστε το* $\int_{-2}^4 f(x)\,dx$ *όταν* $f(x) = \begin{cases} x & \textit{αν } -2 \leq x < 0 \\ 2 & \textit{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 3/x & \textit{αν } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

   Λύση: Η f ταυτίζεται στο $[-2, 0]$ με την συνεχή συνάρτηση x εκτός στο σημείο 0. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-2, 0]$ και

   $$\int_{-2}^0 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 x\,dx = \tfrac{0^2-(-2)^2}{2} = -2.$$

   Η f ταυτίζεται στο $[0, 1]$ με την σταθερή συνάρτηση 2 οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και

   $$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2\,dx = 2(1-0) = 2.$$

   Τέλος η f ταυτίζεται στο $[1, 4]$ με την συνεχή συνάρτηση $\frac{3}{x}$ εκτός στο σημείο 1. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, 4]$ και

   $$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \tfrac{3}{x}\,dx = 3\int_1^4 \tfrac{1}{x}\,dx = 3\log 4.$$

   Άρα συνολικά:

   $$\int_{-2}^4 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx = -2 + 2 + 3\log 4 = 3\log 4.$$

2. *Υπολογίστε το* $\int_{-3/2}^{5/2} [x]\,dx$.

   Λύση: Αν $k \in \mathbb{Z}$, ισχύει $[x] = k$ στο διάστημα $[k, k+1)$. Άρα η συνάρτηση $[x]$ είναι σταθερή k στο $[k, k+1]$ εκτός στο σημείο $k+1$ οπότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[k, k+1]$ και

   $$\int_k^{k+1} [x]\,dx = \int_k^{k+1} k\,dx = k(k+1-k) = k.$$

   Ειδικώτερα:

   $$\int_{-1}^0 [x]\,dx = -1, \qquad \int_0^1 [x]\,dx = 0, \qquad \int_1^2 [x]\,dx = 1.$$

   Στο $[-\frac{3}{2}, -1]$ η συνάρτηση $[x]$ είναι σταθερή -2 εκτός στο σημείο -1 και άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\frac{3}{2}, -1]$ και

   $$\int_{-3/2}^{-1} [x]\,dx = \int_{-3/2}^{-1} (-2)\,dx = (-2)(-1 + \tfrac{3}{2}) = -1.$$

   Τέλος, στο $[2, \frac{5}{2}]$ η $[x]$ είναι σταθερή 2 και άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[2, \frac{5}{2}]$ και

   $$\int_2^{5/2} [x]\,dx = \int_2^{5/2} 2\,dx = 2(\tfrac{5}{2} - 2) = 1.$$

   Επομένως

   $$\begin{aligned}\int_{-3/2}^{5/2} [x]\,dx &= \int_{-3/2}^{-1} [x]\,dx + \int_{-1}^0 [x]\,dx + \int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx + \int_2^{5/2} [x]\,dx \\ &= -1 - 1 + 0 + 1 + 1 = 0.\end{aligned}$$

3. *Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι*

   $$0.60 < \int_{1/2}^2 \tfrac{x}{x^2+1}\,dx < 0.75.$$

   Λύση: Η συνάρτηση $\frac{x}{x^2+1}$ έχει παράγωγο $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ η οποία είναι > 0 στο $[\frac{1}{2}, 1)$ και < 0 στο $(1, 2]$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2}, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$.

Επομένως στο $[\frac{1}{2}, 2]$ η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή της στο 1, δηλαδή $\frac{1}{2}$, και η ελάχιστη τιμή της είναι η μικρότερη από τις τιμές της στα $\frac{1}{2}$ και 2: και οι δύο αυτές τιμές είναι $\frac{2}{5}$. Άρα ισχύει

$$\tfrac{2}{5} \le \tfrac{x}{x^2+1} \le \tfrac{1}{2} \qquad \text{στο } [\tfrac{1}{2}, 2].$$

Η συνάρτηση είναι και ολοκληρώσιμη στο $[\frac{1}{2}, 2]$ ως συνεχής και άρα

$$\tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{5}(2 - \tfrac{1}{2}) \le \int_{1/2}^{2} \tfrac{x}{x^2+1}\, dx \le \tfrac{1}{2}(2 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{4}.$$

4. *Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \tfrac{t}{1+t^2}\, dt = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\, dt = 1.$$

Λύση: (i) Η συνάρτηση $\frac{t}{1+t^2}$ έχει παράγωγο $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ η οποία είναι > 0 στο $(-1, 1)$ και < 0 στα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.
Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x \to +\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x \ge 1$, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x, x + \sqrt{x}]$. Άρα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό είναι οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος, και έχουμε ότι ισχύει

$$\tfrac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2} \le \tfrac{t}{1+t^2} \le \tfrac{x}{1+x^2} \qquad \text{για } t \in [x, x + \sqrt{x}].$$

Άρα

$$\tfrac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2}\,\sqrt{x} \le \int_x^{x+\sqrt{x}} \tfrac{t}{1+t^2}\, dt \le \tfrac{x}{1+x^2}\,\sqrt{x}.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $x \ge 1$ και τώρα με την ιδιότητα παρεμβολής βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \tfrac{t}{1+t^2}\, dt = 0.$$

(ii) Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x \to 0+$, θεωρούμε ότι $0 < x \le 1$, οπότε η συνάρτηση $\frac{t}{1+t^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1-x, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 1+x]$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο $[1-x, 1+x]$ είναι η τιμή της στο 1 και η ελάχιστη τιμή της στο $[1-x, 1+x]$ είναι η μικρότερη από τις τιμές της στα άκρα $1-x$ και $1+x$. Με μία απλή σύγκριση βρίσκουμε ότι η μικρότερη από τις δύο τιμές στα άκρα είναι η τιμή στο $1-x$ και συμπεραίνουμε ότι, αν $0 < x \le 1$, τότε ισχύει

$$\tfrac{1-x}{1+(1-x)^2} \le \tfrac{t}{1+t^2} \le \tfrac{1}{2} \qquad \text{για } t \in [1-x, 1+x].$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\tfrac{1-x}{1+(1-x)^2}\, 2x \le \int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\, dt \le \tfrac{1}{2}\, 2x$$

και, επομένως,

$$\tfrac{2(1-x)}{1+(1-x)^2} \le \tfrac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\, dt \le 1$$

για κάθε x με $0 < x \le 1$.
Από την ιδιότητα παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\, dt = 1.$$

5. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

   (i) Τί συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$;

   (ii) Τί συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$;

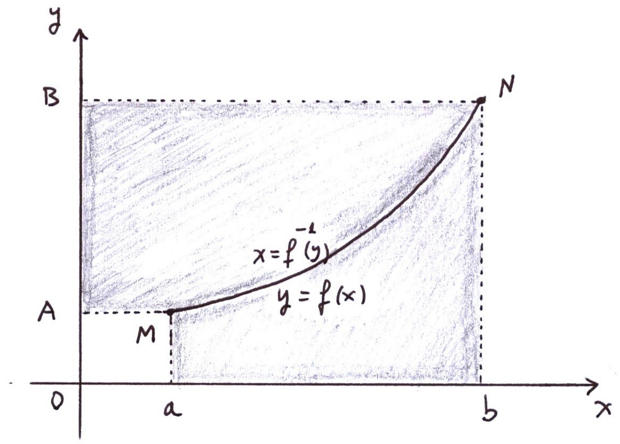
   Λύση: (i) Προφανώς ισχύει $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και άρα $\int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$. Στην περίπτωση της ισότητας $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ συνεπάγεται ότι ισχύει $f^2(x) = 0$, ή ισοδύναμα $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a,b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f.

   (ii) Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε κάθε $x \in [a,b]$ είναι σημείο συνέχειας της f οπότε το συμπέρασμα είναι ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

6. *Έστω $0 \leq a < b$ και $0 \leq A < B$ και ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$ με $f(a) = A$, $f(b) = B$. Γνωρίζουμε ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B]$ με $f^{-1}(A) = a$, $f^{-1}(B) = b$. Αποδείξτε με γεωμετρικό τρόπο ότι*

   $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_A^B f^{-1}(y)\,dy = Bb - Aa.$$

   Λύση: Στο σχήμα φαίνεται το γράφημα της f ως συνάρτηση από το $[a,b]$ στο $[A,B]$ και το γράφημα της f^{-1} ως συνάρτηση από το $[A,B]$ στο $[a,b]$.



   Τα δύο γραφήματα ταυτίζονται με την ίδια καμπύλη. Προσέξτε: αν θέλαμε να τοποθετήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1} σε οριζόντιο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της σε κατακόρυφο άξονα, θα κάναμε ανάκλαση του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο του επιπέδου και τότε το γράφημα της f^{-1} θα ήταν το συμμετρικό του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο. Όμως, εμείς τώρα κρατάμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1}, δηλαδή την y, στον κατακόρυφο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της, δηλαδή την x, στον οριζόντιο άξονα. Τώρα, το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σχήματος $abNM$ και το $\int_A^B f^{-1}(y)\,dy$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σχήματος $ABNM$. Άρα το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων είναι ίσο με το εμβαδό του σχήματος $aMABNb$, το οποίο είναι ίσο με την διαφορά των εμβαδών των ορθογωνίων παραλληλογράμμων $0bNB$ και $0aMA$, δηλαδή ίσο με $Bb - Aa$.

Πριν προχωρήσετε στην λύση των ασκήσεων 7-11, ας ξεκαθαρίσουμε κάποια πράγματα σχετικά με τον συμβολισμό $\sum$ για αθροίσματα.

Πολλές φορές συναντάμε αθροίσματα με n προσθετέους στα οποία η διάταξη των προσθετέων καθορίζεται από ένα δείκτη, ας πούμε k, ο οποίος παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από 1 μέχρι n: ο πρώτος προσθετέος, ο δεύτερος προσθετέος, κ.τ.λ., ο k-οστός προσθετέος, κ.τ.λ., ο n-οστός προσθετέος. Για παράδειγμα:

$$1 + 2 + \cdots + k + \cdots + n, \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots + n^2, \quad \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{k} + \cdots + \tfrac{1}{n}.$$

Τότε, για εξοικονόμηση χώρου, συνηθίζουμε να συμπτύσσουμε το άθροισμα χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\sum$ ως εξής: γράφουμε μόνο τον k-οστό προσθετέο και μπροστά από αυτόν το σύμβολο $\sum_{k=1}^{n}$ στο οποίο δηλώνουμε ότι ο δείκτης k διατρέχει όλες τις ακέραιες τιμές από 1 μέχρι n. Για παράδειγμα, τα προηγούμενα τρία αθροίσματα γράφονται:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Πιο γενικά, αν έχουμε ένα άθροισμα

$$a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n,$$

μπορούμε να το γράψουμε

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(Μπορεί να συναντήσουμε και αθροίσματα $\sum_{k=m}^{n} a_k$ στα οποία ο δείκτης k διατρέχει όλες τις ακέραιες τιμές από m μέχρι n.)

Ας δούμε δύο απλούς κανόνες αλγεβρικού χειρισμού τέτοιων αθροισμάτων.

Παίρνουμε τον γνωστό τύπο αναδιάταξης των προσθετέων

$$(a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_k+\cdots+b_n) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_k+b_k)+\cdots+(a_n+b_n)$$

και με το σύμβολο $\sum$ τον γράφουμε

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k).$$

Επίσης, τον τύπο εξαγωγής κοινού παράγοντα

$$\lambda a_1 + \cdots + \lambda a_k + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n)$$

με το σύμβολο $\sum$ τον γράφουμε

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Συνεχίζουμε με τις υπόλοιπες ασκήσεις.

7. *Θεωρήστε διαμέριση του $[a, b]$ με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία για να αποδείξετε ότι*

$$\textstyle\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

Λύση: Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Όπως έχουμε δει, τα διαιρετικά σημεία της Δ δίνονται από τον τύπο

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } 0 \le k \le n.$$

Όλα τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ έχουν ίδιο μήκος

$$x_k - x_{k-1} = \tfrac{b-a}{n}$$

οπότε το πλάτος της Δ είναι ακριβώς $\frac{b-a}{n}$.

Επίσης επιλέγουμε το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, όπου το κάθε ξ_k είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του αντίστοιχου διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$. Εμείς θα επιλέξουμε

$$\xi_k = x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } 1 \le k \le n.$$

Δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο.
Τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της συνάρτησης e^x στο $[a, b]$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n} e^{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} e^{a+k\frac{b-a}{n}}\,\frac{b-a}{n} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} e^{a}e^{kt_n}t_n \qquad\qquad \text{με } t_n = \frac{b-a}{n} \\
&= e^a t_n \textstyle\sum_{k=1}^{n}(e^{t_n})^k \\
&= e^a t_n e^{t_n}\,\frac{(e^{t_n})^n-1}{e^{t_n}-1} \\
&= e^a t_n e^{t_n}\,\frac{e^{b-a}-1}{e^{t_n}-1} \\
&= e^a(e^{b-a}-1)e^{t_n}\,\frac{t_n}{e^{t_n}-1} \\
&= (e^b - e^a)e^{t_n}\,\frac{t_n}{e^{t_n}-1}.
\end{aligned}$$

Επεξήγηση για την τέταρτη ισότητα: με $\lambda = e^{t_n}$ έχουμε

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}(e^{t_n})^k = \sum_{k=1}^{n}\lambda^k = \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n = \lambda(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1}) = \lambda\,\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}.$$

Τώρα, αν $n \to +\infty$ έχουμε ότι το πλάτος της Δ, δηλαδή το $\frac{b-a}{n}$, τείνει στο 0. Επομένως το αντίστοιχο άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b e^x\,dx$:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} e^{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b e^x\,dx.$$

Δηλαδή:

$$(e^b - e^a)e^{t_n}\,\tfrac{t_n}{e^{t_n}-1} \to \textstyle\int_a^b e^x\,dx.$$

Επομένως η τιμή του $\int_a^b e^x\,dx$ είναι το όριο του $(e^b - e^a)e^{t_n}\,\frac{t_n}{e^{t_n}-1}$ όταν $n \to +\infty$.
Το $e^b - e^a$ είναι σταθερό αφού δεν εξαρτάται από το n. Επειδή $t_n = \frac{b-a}{n} \to 0$ συνεπάγεται $e^{t_n} \to 1$. Απομένει να βρούμε το όριο του $\frac{t_n}{e^{t_n}-1}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.
Όμως γνωρίζουμε το όριο

$$\lim_{t\to 0}\tfrac{e^t-1}{t} = \lim_{t\to 0}\tfrac{e^t-e^0}{t-0} = \tfrac{de^t}{dt}\Big|_{t=0} = 1.$$

Άρα

$$(e^b - e^a)e^{t_n}\,\tfrac{t_n}{e^{t_n}-1} \to (e^b - e^a)\cdot 1\cdot 1 = e^b - e^a$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\textstyle\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

8. *Θεωρήστε διαμέριση του $[a, b]$ με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία για να αποδείξετε ότι*

$$\textstyle\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Θα χρειαστείτε τους τύπους

$$\cos t + \cos(2t) + \cos(3t) + \cdots + \cos(nt) = \big(\sin\tfrac{nt}{2}\cos\tfrac{(n+1)t}{2}\big)/\big(\sin\tfrac{t}{2}\big)$$

$$\sin t + \sin(2t) + \sin(3t) + \cdots + \sin(nt) = \big(\sin\tfrac{nt}{2}\sin\tfrac{(n+1)t}{2}\big)/\big(\sin\tfrac{t}{2}\big)$$

οι οποίοι προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη τους με το $\sin\frac{t}{2}$.
Λύση: Ο πρώτος τύπος προκύπτει εύκολα από την ισότητα

$$\sin\tfrac{t}{2}\cos(kt) = \tfrac{1}{2}\sin(kt + \tfrac{t}{2}) - \tfrac{1}{2}\sin(kt - \tfrac{t}{2})$$

με άθροιση για $k = 1, \ldots, n$. Ο δεύτερος τύπος προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από την ισότητα

$$\sin\tfrac{t}{2}\sin(kt) = -\tfrac{1}{2}\cos(kt + \tfrac{t}{2}) + \tfrac{1}{2}\cos(kt - \tfrac{t}{2}).$$

Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$ (όπως στην προηγούμενη άσκηση). Τα διαιρετικά σημεία της Δ δίνονται από τον τύπο

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } 0 \le k \le n$$

και όλα τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ έχουν ίδιο μήκος $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ οπότε το πλάτος της Δ είναι $\frac{b-a}{n}$. Κατόπιν επιλέγουμε το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ όπου το κάθε ξ_k είναι το δεξιό άκρο του αντίστοιχου διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k = x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } 1 \le k \le n.$$

Τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της συνάρτησης $\cos x$ στο $[a, b]$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos \xi_k \,(x_k - x_{k-1}) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos(a + k\frac{b-a}{n})\, \frac{b-a}{n} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos(a + kt_n) t_n \qquad\qquad \text{με } t_n = \frac{b-a}{n} \\
&= t_n \textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos(a + kt_n) \\
&= t_n \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\cos a \cos(kt_n) - \sin a \sin(kt_n)) \\
&= t_n \textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos a \cos(kt_n) - t_n \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sin a \sin(kt_n) \\
&= t_n \cos a \textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt_n) - t_n \sin a \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kt_n) \\
&= t_n \cos a \, \frac{\sin \frac{nt_n}{2} \cos \frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin \frac{t_n}{2}} - t_n \sin a \, \frac{\sin \frac{nt_n}{2} \sin \frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin \frac{t_n}{2}} \\
&= t_n \cos a \, \frac{\sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin \frac{t_n}{2}} - t_n \sin a \, \frac{\sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin \frac{t_n}{2}} \\
&= \sin \tfrac{b-a}{2} \left(\cos a \cos \tfrac{(n+1)t_n}{2} - \sin a \sin \tfrac{(n+1)t_n}{2} \right) \frac{t_n}{\sin \frac{t_n}{2}} \\
&= \sin \tfrac{b-a}{2} \cos \left(a + \tfrac{(n+1)t_n}{2} \right) \frac{t_n}{\sin \frac{t_n}{2}}
\end{aligned}$$

Τώρα, αν $n \to +\infty$ έχουμε ότι το πλάτος της Δ, δηλαδή το $\frac{b-a}{n}$, τείνει στο 0. Επομένως το αντίστοιχο άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b \cos x \, dx$:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos \xi_k \,(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b \cos x \, dx.$$

Δηλαδή:

$$\sin \tfrac{b-a}{2} \cos \left(a + \tfrac{(n+1)t_n}{2} \right) \frac{t_n}{\sin \frac{t_n}{2}} \to \int_a^b \cos x \, dx.$$

Όταν $n \to +\infty$ έχουμε

$$\tfrac{(n+1)t_n}{2} = \tfrac{(b-a)(n+1)}{2n} \to \tfrac{b-a}{2}$$

οπότε

$$\cos \left(a + \tfrac{(n+1)t_n}{2} \right) \to \cos \left(a + \tfrac{b-a}{2} \right) = \cos \tfrac{b+a}{2}.$$

Τέλος, επειδή $t_n = \frac{b-a}{n} \to 0$, από το $\frac{t_n}{\sin \frac{t_n}{2}}$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{2}$$

και άρα

$$\sin \tfrac{b-a}{2} \cos \left(a + \tfrac{(n+1)t_n}{2} \right) \frac{t_n}{\sin \frac{t_n}{2}} \to 2 \sin \tfrac{b-a}{2} \cos \tfrac{b+a}{2} = \sin b - \sin a.$$

Έτσι καταλήγουμε στο

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και το

$$\int_a^b \sin x \, dx = \cos a - \cos b.$$

9. Αν $0 < a < b, p \neq -1$, με την διαμέριση του παραδείγματος $\int_a^b \frac{1}{x}\, dx$ αποδείξτε ότι

$$\int_a^b x^p\, dx = \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.$$

Λύση: Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ όπου τα διαιρετικά σημεία δίνονται από τον τύπο

$$x_k = a\mu_n^k \qquad \text{για } 0 \leq k \leq n.$$

Ο αριθμός $\mu_n > 1$ προσδιορίζεται από την ισότητα $a\mu_n^n = b$ ώστε το τελευταίο σημείο της διαμέρισης να είναι το b. Δηλαδή

$$\mu_n = \left(\tfrac{b}{a}\right)^{1/n} > 1.$$

Προσέξτε: τα υποδιαστήματα δεν έχουν ίδιο μήκος.
Θεωρούμε και το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ όπου το κάθε ξ_k είναι το δεξιό άκρο του αντίστοιχου διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k = x_k = a\mu_n^k \qquad \text{για } 1 \leq k \leq n.$$

Τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της συνάρτησης x^p στο $[a, b]$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^n \xi_k^p (x_k - x_{k-1}) &= \textstyle\sum_{k=1}^n a^p \mu_n^{kp} (a\mu_n^k - a\mu_n^{k-1}) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n a^p \mu_n^{kp} a\mu_n^k \big(1 - \tfrac{1}{\mu_n}\big) \\
&= a^{p+1}\big(1 - \tfrac{1}{\mu_n}\big) \textstyle\sum_{k=1}^n (\mu_n^{p+1})^k \\
&= a^{p+1}\big(1 - \tfrac{1}{\mu_n}\big)\mu_n^{p+1}\, \tfrac{(\mu_n^{p+1})^n - 1}{\mu_n^{p+1}-1} \\
&= a^{p+1}(\mu_n - 1)\mu_n^p\, \tfrac{(b/a)^{p+1}-1}{\mu_n^{p+1}-1} \\
&= a^{p+1}((b/a)^{p+1} - 1)\mu_n^p\, \tfrac{\mu_n - 1}{\mu_n^{p+1}-1} \\
&= (b^{p+1} - a^{p+1})\mu_n^p\, \tfrac{\mu_n-1}{\mu_n^{p+1}-1}.
\end{aligned}$$

Το μήκος του k-οστού υποδιαστήματος της Δ είναι $a\mu_n^k - a\mu_n^{k-1} = a(1 - \frac{1}{\mu_n})\mu_n^k$ και, επειδή $\mu_n > 1$, το μεγαλύτερο μήκος είναι το n-οστό. Δηλαδή το πλάτος της Δ είναι ίσο με

$$a\big(1 - \tfrac{1}{\mu_n}\big)\mu_n^n = b\big(1 - (\tfrac{a}{b})^{1/n}\big).$$

Άρα όταν $n \to +\infty$ το πλάτος της Δ τείνει στο 0 και επομένως το αντίστοιχο άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b x^p\, dx$:

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \xi_k^p (x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b x^p\, dx.$$

Δηλαδή:

$$(b^{p+1} - a^{p+1})\mu_n^p\, \tfrac{\mu_n-1}{\mu_n^{p+1}-1} \to \int_a^b x^p\, dx.$$

Τώρα έχουμε ότι $\mu_n = (\frac{b}{a})^{1/n} \to 1$ οπότε $\mu_n^p \to 1$. Από το $\frac{\mu_n-1}{\mu_n^{p+1}-1}$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, αλλά γνωρίζουμε το όριο

$$\lim_{t\to1} \tfrac{t^{p+1}-1}{t-1} = \lim_{t\to1} \tfrac{t^{p+1}-1^{p+1}}{t-1} = \tfrac{dt^{p+1}}{dt}\Big|_{t=1} = p.$$

Επομένως

$$(b^{p+1} - a^{p+1})\mu_n^p\, \tfrac{\mu_n-1}{\mu_n^{p+1}-1} \to (b^{p+1} - a^{p+1}) \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{p} = \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b x^p\, dx = \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p}.$$

10. *Γράψτε το όριο*
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{n+k}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}\right)$$
με την μορφή ολοκληρώματος ως εξής: γράψτε $\frac{1}{n+k}=\frac{1}{1+(k/n)}\,\frac{1}{n}=f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ *με κατάλληλη συνάρτηση* f *στο διάστημα* $[0,1]$, *κατάλληλη διαμέριση* $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ *του* $[0,1]$ *και κατάλληλο σύνολο* $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ *ενδιάμεσων σημείων.*

Λύση: Αν πάρουμε διαιρετικά σημεία στο $[0,1]$ έτσι ώστε να σχηματίζονται n υποδιαστήματα ίδιου μήκους, τότε κάθε υποδιάστημα θα έχει μήκος $\frac{1}{n}$. Τα διαιρετικά σημεία θα δίνονται από τον γνωστό τύπο:
$$x_k=\tfrac{k}{n}\qquad \text{για } 0\le k\le n.$$
Πράγματι, το k-οστό υποδιάστημα $[x_{k-1},x_k]$ έχει μήκος $x_k-x_{k-1}=\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}=\frac{1}{n}$. Τώρα επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Δηλαδή
$$\xi_k=x_k=\tfrac{k}{n}\qquad \text{για } 1\le k\le n.$$
Τέλος, θεωρούμε την συνάρτηση
$$f(x)=\tfrac{1}{1+x}\qquad \text{για } x\in[0,1].$$
Τώρα έχουμε ότι
$$\tfrac{1}{n+k}=\tfrac{1}{1+(k/n)}\,\tfrac{1}{n}=f(k/n)\,\tfrac{1}{n}=f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\qquad \text{για } 1\le k\le n.$$
Επομένως το δοσμένο άθροισμα γράφεται
$$\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{n+k}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}=\textstyle\sum_{k=1}^n\tfrac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$
οπότε είναι ίσο με το άθροισμα Riemann της f στο $[0,1]$ ως προς την διαμέριση $\Delta=\{x_0,\dots,x_n\}$ του $[0,1]$ και το σύνολο $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων που ορίσαμε. Επειδή το πλάτος της Δ είναι $\frac{1}{n}$ και τείνει στο 0 όταν $n\to+\infty$, συνεπάγεται ότι το άθροισμα Riemann (δηλαδή το δοσμένο άθροισμα) τείνει στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο $[0,1]$. Άρα
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{n+k}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\textstyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\int_0^1\tfrac{1}{1+x}\,dx.$$

Πρώτο σχόλιο: Αργότερα θα υπολογίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος: $\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\log 2$. Έτσι ο αριθμός $\log 2$ είναι η τιμή του ορίου του δοσμένου αθροίσματος.

Δεύτερο σχόλιο: Με την ευκαιρία ας επισημάνουμε ένα συνηθισμένο λάθος: όταν έχουμε ένα άθροισμα του οποίου κάθε προσθετέος έχει όριο 0 κάνουμε το λάθος και συμπεραίνουμε ότι και το άθροισμα έχει όριο 0. Αυτό το συμπέρασμα είναι σωστό όταν το *πλήθος* των προσθετέων στο άθροισμα είναι *σταθερό* (άθροισμα με δύο ή τρεις ή δέκα προσθετέους), αλλά δεν είναι απαραίτητα σωστό όταν το πλήθος των προσθετέων αυξάνεται απεριόριστα. Για παράδειγμα στο δοσμένο άθροισμα κάθε όρος τείνει στο 0 όταν $n\to+\infty$ αλλά και το πλήθος των προσθετέων, το οποίο είναι n, τείνει στο $+\infty$. Και, όπως είδαμε, το άθροισμα τείνει στον αριθμό $\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$. Ο αριθμός αυτός, ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή του (δηλαδή $\log 2$), μπορούμε αμέσως να πούμε ότι είναι >0 αφού η συνάρτηση $\frac{1}{1+x}$ είναι συνεχής και >0 στο $[0,1]$.

11. *Γράψτε το όριο*
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\tfrac{n}{n^2+1^2}+\cdots+\tfrac{n}{n^2+k^2}+\cdots+\tfrac{n}{n^2+n^2}\right)$$

με την μορφή ολοκληρώματος κατάλληλης συνάρτησης σε κατάλληλο διάστημα. Λύση: Όπως στην προηγούμενη άσκηση, παίρνουμε διαιρετικά σημεία στο $[0,1]$

$$x_k = \tfrac{k}{n} \qquad \text{για } 0 \leq k \leq n$$

έτσι ώστε να σχηματίζονται n υποδιαστήματα ίδιου μήκους. Κατόπιν επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Δηλαδή

$$\xi_k = x_k = \tfrac{k}{n} \qquad \text{για } 1 \leq k \leq n.$$

Τέλος, θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \qquad \text{για } x \in [0,1].$$

Τώρα

$$\tfrac{n}{n^2+k^2} = \tfrac{1}{1+(k/n)^2}\,\tfrac{1}{n} = f(k/n)\,\tfrac{1}{n} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{για } 1 \leq k \leq n$$

και άρα

$$\tfrac{n}{n^2+1^2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+k^2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+n^2} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \tfrac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Έτσι το δοσμένο άθροισμα είναι ίσο με το άθροισμα Riemann της f στο $[0,1]$ ως προς την διαμέριση $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[0,1]$ και το σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων που ορίσαμε. Επειδή το πλάτος της Δ είναι $\frac{1}{n}$ και τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$, συνεπάγεται ότι το άθροισμα Riemann (δηλαδή το δοσμένο άθροισμα) τείνει στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο $[0,1]$. Άρα

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\tfrac{n}{n^2+1^1} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+k^2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+n^2}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \textstyle\int_0^1 \tfrac{1}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Σχόλιο: Αργότερα θα δούμε ότι $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.