Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις ενδέκατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *(i) Βρείτε μία παράγουσα της* $2x+\frac{1}{x}$ *στο* $(0,+\infty)$. *Ποιές είναι όλες οι παράγουσες της* $2x+\frac{1}{x}$ *στο* $(0,+\infty)$*;*

   (ii) Βρείτε μία παράγουσα της $2x+\frac{1}{x}$ *στο* $(0,+\infty)$ *ώστε η τιμή της στο* $x=1$ *να είναι* -3. *Πόσες τέτοιες παράγουσες υπάρχουν;*

   Λύση: (i) Η συνάρτηση $x^2+\log x$ είναι παράγουσα της $2x+\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$.
   Επειδή το $(0,+\infty)$ είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $x^2+\log x+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, είναι όλες οι παράγουσες της $2x+\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$.

   (ii) Για να βρούμε μία παράγουσα με τίμη -3 στο $x=1$, γράφουμε $1^2+\log 1+c=-3$ και βρίσκουμε $c=-4$. Άρα υπάρχει μόνο μία παράγουσα της $2x+\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$ με τιμή -3 στο $x=1$ και αυτή είναι η συνάρτηση $x^2+\log x-4$.

2. *Αποδείξτε ότι η* $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{αν } x<0\\ 1, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ *δεν έχει παράγουσα στο* $(-\infty,+\infty)$.

   Λύση: Έστω F παράγουσα της f στο $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή, έστω $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,+\infty)$.
   Επειδή ισχύει $F'(x)=2x=(x^2)'$ για $x\in(-\infty,0)$ και η F είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $(-\infty,0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει $F(x)=x^2+c_1$ για $x\in(-\infty,0]$.
   Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(x)=1=x'$ για $x\in(0,+\infty)$ και η F είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει $F(x)=x+c_2$ για $x\in[0,+\infty)$.
   Βλέπουμε ότι $c_1=F(0)=c_2$ και, συμβολίζοντας $c=c_1=c_2$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

   $$F(x)=\begin{cases}x^2+c, & \text{αν } x\leq 0\\ x+c, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$

   Τώρα, όμως, είναι $F'_-(0)=0$ (γιατί;) και $F'_+(0)=1$ (γιατί;), οπότε η F δεν έχει παράγωγο στο 0. Αυτό είναι άτοπο διότι πρέπει να ισχύει $F'(0)=f(0)=1$.

3. *(i) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της* $1-\sin x$ *στο* $(-\infty,+\infty)$. *Ποιά είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της* $1-\sin x$ *στο* $(-\infty,+\infty)$*; Με άλλα λόγια, ποιό είναι το* $\int(1-\sin x)\,dx$*;*

   (ii) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1-\sin x$ *στο* $(-\infty,+\infty)$ *ώστε η τιμή του στο* $x=\pi$ *να είναι* -1. *Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;*

   Λύση: (i) Η συνάρτηση

   $$\int_0^x(1-\sin t)\,dt=x+\cos x-\cos 0=x+\cos x-1$$

   είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1-\sin x$ στο $(-\infty,+\infty)$.
   Επειδή το $(-\infty,+\infty)$ είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $x+\cos x+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο $(-\infty,+\infty)$, είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1-\sin x$ στο $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή

   $$\int(1-\sin x)\,dx=x+\cos x+c.$$

   (ii) Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα με τίμη -1 στο $x=\pi$, γράφουμε $\pi+\cos\pi+c=-1$ και βρίσκουμε $c=-\pi$. Άρα υπάρχει μόνο ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1-\sin x$ στο $(-\infty,+\infty)$ με τιμή -1 στο $x=\pi$ και αυτό είναι η συνάρτηση $x+\cos x-\pi$.

4. *Έστω $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 + 3 + \sin x$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;*

   Λύση: Η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ είναι όλες οι συναρτήσεις $x^2 + 3 + \sin x + c = x^2 + \sin x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο $(-\infty, +\infty)$.

5. *Βρείτε συνεχή συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 12$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;*

   Λύση: Αν υπάρχει f συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 12$ για κάθε x, τότε παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) = 6x$ για κάθε x. Με την συνάρτηση $f(x) = 6x$ έχουμε $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x 6t\,dt = 3x^2 - 3a^2$, οπότε ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 12$ για κάθε x αν και μόνο αν $3a^2 = 12$.
   Άρα υπάρχουν ακριβώς μία συνάρτηση, η $f(x) = 6x$, και ακριβώς δύο a, το $a = 2$ και το $a = -2$.

6. *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x - 1$.*

   Λύση: Δεν είναι δυνατό να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x$ για κάθε x, αφού δεν ισχύει για $x = 0$. Αντιθέτως, η $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x - 1$ ισχύει για $x = 0$.
   Τώρα, αν υπάρχει f συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x - 1$ για κάθε x, τότε παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) = -\sin x$ για κάθε x. Με την $f(x) = -\sin x$ έχουμε, πράγματι, ότι ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = -\int_0^x \sin t\,dt = \cos x - 1$ για κάθε x.

7. *Έστω f ορισμένη στο διάστημα I και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Επίσης, έστω g, h ορισμένες στο σύνολο A με τιμές στο I και η συνάρτηση F με τύπο*

   $$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt \qquad \text{για } x \in A.$$

   (i) Αν οι g, h είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$ και η f είναι συνεχής στα $g(x_0)$ και $h(x_0)$, αποδείξτε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = g'(x_0)f(g(x_0)) - h'(x_0)f(h(x_0))$.
   (ii) Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

   $$\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt, \qquad \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$$

   και τις παραγώγους τους.

   Λύση: Το πρώτο πράγμα που σκεφτόμαστε για την παράσταση $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ είναι αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα με άκρα $g(x)$ και $h(x)$ (ώστε να έχει νόημα το ολοκλήρωμα). Στην συγκεκριμένη περίπτωση αυτό εξασφαλίζεται από τις υποθέσεις μας: οι τιμές των συναρτήσεων g, h είναι στο I, οπότε για κάθε $x \in A$ τα $g(x), h(x)$ ανήκουν στο I και, επειδή το I είναι διάστημα και η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα με άκρα $g(x)$ και $h(x)$.
   (i) Θεωρούμε οποιοδήποτε $a \in I$ και γράφουμε

   $$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt - \int_a^{h(x)} f(t)\,dt \qquad \text{για } x \in A.$$

   Η συνάρτηση $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ είναι σύνθεση του αόριστου ολοκληρώματος $K(y) = \int_a^y f(t)\,dt$ και της $g(x)$:

   $$G(x) = K(g(x)) \qquad \text{για } x \in A.$$

   Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η K είναι παραγωγίσμη στο $g(x_0)$ (αφού η f είναι συνεχής στο $g(x_0)$), συνεπάγεται ότι η G είναι παραγωγίσμη στο x_0 και

   $$G'(x_0) = K'(g(x_0))g'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0).$$

Ακριβώς όμοια, η συνάρτηση $H(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\,dt$ είναι σύνθεση του αόριστου ολοκληρώματος $K(y) = \int_a^y f(t)\,dt$ και της $h(x)$:

$$H(x) = K(h(x)) \qquad \text{για } x \in A.$$

Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η K είναι παραγωγίσμη στο $h(x_0)$ (αφού η f είναι συνεχής στο $h(x_0)$), συνεπάγεται ότι η H είναι παραγωγίσμη στο x_0 και

$$H'(x_0) = K'(h(x_0))h'(x_0) = f(h(x_0))h'(x_0).$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$F'(x_0) = G'(x_0) - H'(x_0) = f(g(x_0))g'(x_0) - f(h(x_0))h'(x_0).$$

(ii) Η συνάρτηση $f(t) = \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}$ ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και, ως συνεχής, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(-\infty, +\infty)$. Άρα η $F(x) = \int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$ ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει

$$F'(x) = (2x-1)\frac{(x^2-x)^2-2(x^2-x)}{e^{x^2-x}+2(x^2-x)^2} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Η συνάρτηση $f(t) = \frac{e^t}{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και μάλιστα απειρίζεται όταν το t πλησιάζει το 0 είτε από τα δεξιά του είτε από τα αριστερά του. Άρα για να είναι η f ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα με άκρα x και x^2 πρέπει αυτά να ανήκουν είτε και τα δύο στο $(-\infty, 0)$ είτε και τα δύο στο $(0, +\infty)$ και άρα πρέπει να ανήκουν και τα δύο στο $(0, +\infty)$ (αφού $x^2 > 0$). Άρα το πεδίο ορισμού της $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$ είναι το $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$F'(x) = 2x\frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{e^x}{x} \qquad \text{για } x > 0.$$

8. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt = 0$.

   Λύση: Επειδή $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$, εφαρμόζουμε τον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl και βρίσκουμε

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

9. *Βρείτε* $a > 0$ *και* b *ώστε* $\lim_{x\to0+} \frac{1}{e^x-b-cx-dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$.

   Λύση: Είναι $\lim_{x\to0+}(e^x - b - cx - dx^2) = 1 - b$ και $\lim_{x\to0+} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 0$.
   Άρα, αν $b \neq 1$, τότε $\lim_{x\to0+} \frac{1}{e^x-b-cx-dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 0$ και, επομένως, $b = 1$.
   Τώρα, από τον κανόνα του l' Hopitâl συνεπάγεται

$$\lim_{x\to0+} \frac{1}{e^x-1-cx-dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = \lim_{x\to0+} \frac{1}{e^x-c-2dx} \frac{x^2}{\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to0+} \frac{x^2}{e^x-c-2dx}.$$

Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να υπάρχει το τελευταίο όριο. Και, πράγματι, το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0 αν $c \neq 1$, οπότε σ'αυτήν την περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, ή, αν $c = 1$, είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0+} \frac{x^2}{e^x-1-2dx} = \lim_{x\to0+} \frac{2x}{e^x-2d}.$$

Και πάλι, για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να υπάρχει το τελευταίο όριο. Το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0 αν $2d \neq 1$, οπότε σ'αυτήν την περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, ή, αν $2d = 1$, είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0+} \frac{2x}{e^x-1} = \lim_{x\to0+} \frac{2}{e^x} = 2.$$

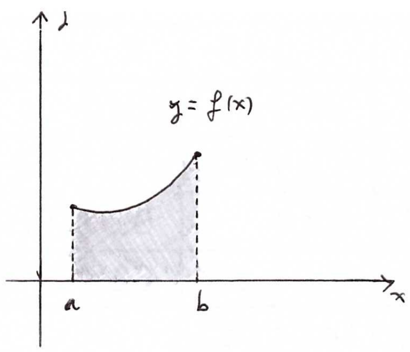
Άρα πρέπει να είναι $b = c = 1$ και $d = \frac{1}{2}$ και τότε

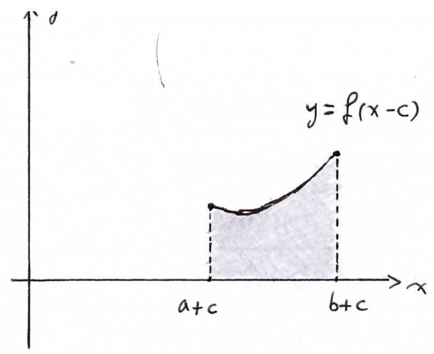
$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{e^x - 1 - x - (1/2)x^2} \int_0^x \tfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt = \tfrac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^2}{e^x - 1 - x} = \tfrac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \tfrac{2x}{e^x - 1} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \tfrac{2}{e^x} = \tfrac{2}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

και, επομένως, $a = 4$.

10. *Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.*
(i) $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.
(ii) $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$ *για κάθε* $\lambda > 0$.
Μελετήστε το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων, θεωρώντας επιπλέον ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$.
Λύση: (i) Στο $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \phi(x) = x - c$, για την οποία ισχύει $\phi'(x) = 1$ και $\phi(a+c) = a$, $\phi(b+c) = b$, και βρίσκουμε

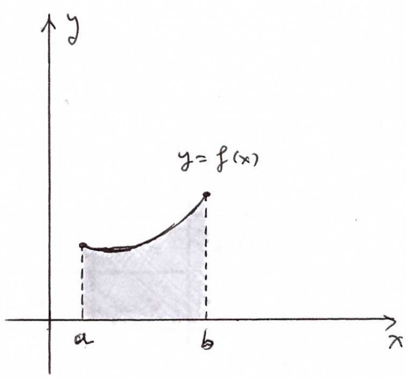
$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int_{\phi(a+c)}^{\phi(b+c)} f(y)\, dy = \int_a^b f(y)\, dy.$$

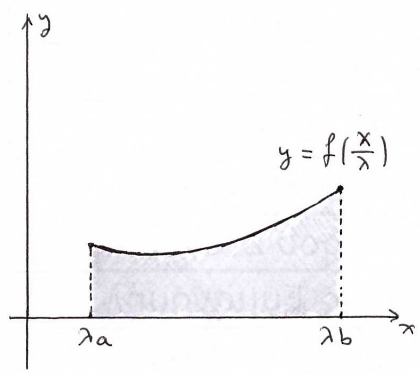




Το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της ιδιότητας φαίνεται στο σχήμα. Η συνάρτηση $f(x-c)$ είναι η $f(x)$ μεταφερμένη οριζόντια κατά c. Το $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της $f(x-c)$ στο διάστημα $[a+c, b+c]$ και είναι ίσο με το εμβαδό κάτω από το γράφημα της $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ το οποίο με τη σειρά του είναι το $\int_a^b f(x)\, dx$.
(ii) Στο $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\, dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \phi(x) = \frac{x}{\lambda}$, για την οποία ισχύει $\phi'(x) = \frac{1}{\lambda}$ και $\phi(\lambda a) = a$, $\phi(\lambda b) = b$, και βρίσκουμε

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\tfrac{x}{\lambda}\big)\, dx = \lambda \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \lambda \int_{\phi(\lambda a)}^{\phi(\lambda b)} f(y)\, dy = \lambda \int_a^b f(y)\, dy.$$





Το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της ιδιότητας φαίνεται στο σχήμα. Το γράφημα της συνάρτησης $f(\frac{x}{\lambda})$ προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε τις x-συντεταγμένες των σημείων του γραφήματος της $f(x)$ με τον ίδιο αριθμό λ. Το $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\,dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της $f(\frac{x}{\lambda})$ στο διάστημα $[\lambda a, \lambda b]$ και προκύπτει από το εμβαδό κάτω από το γράφημα της $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, δηλαδή από το $\int_a^b f(x)\,dx$, όταν το πολλαπλασιάσουμε με τον αριθμό λ.

11. *(i) Αν η* $f:[-b,-a]\cup[a,b]\to\mathbb{R}$ *είναι άρτια αποδείξτε ότι* $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) Αν η $f:[-b,-a]\cup[a,b]\to\mathbb{R}$ *είναι περιττή αποδείξτε ότι* $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

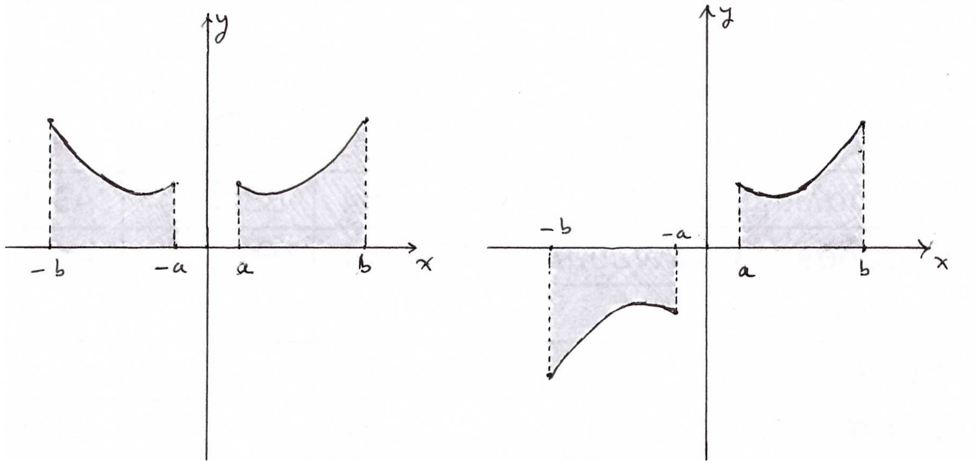
(iii) Αν η $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$ *είναι άρτια αποδείξτε ότι* $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$.

(iv) Αν η $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$ *είναι περιττή αποδείξτε ότι* $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$.

Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

Λύση: (i) Στο $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$ γράφουμε $f(x) = f(-x)$ (αφού η f είναι άρτια) και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\phi(x)=-x$, για την οποία ισχύει $\phi'(x)=-1$ και $\phi(-a)=a$, $\phi(-b)=b$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx &= \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = -\int_{\phi(-b)}^{\phi(-a)} f(y)\,dy\\ &= -\int_b^a f(y)\,dy = \int_a^b f(y)\,dy.\end{aligned}$$



(ii) Στο $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$ γράφουμε $f(x) = -f(-x)$ (αφού η f είναι περιττή) και κάνουμε την ίδια αλλαγή μεταβλητής $y=\phi(x)=-x$ που κάναμε στο (i) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx &= -\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(-b)}^{\phi(-a)} f(y)\,dy\\ &= \int_b^a f(y)\,dy = -\int_a^b f(y)\,dy.\end{aligned}$$

Το γεωμετρικό περιεχόμενο των (i) και (ii) φαίνονται καθαρά στο παραπάνω σχήμα: τα εμβαδά δεξιά του y-άξονα είναι ίδια με τα εμβαδά αριστερά του y-άξονα λόγω συμμετρίας είτε ως προς τον y-άξονα είτε ως προς το σημείο $(0,0)$.

(iii) Το (i) με $a=0$ λέει ότι $\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx$ και άρα

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx.$$

(iv) Το (ii) με $a=0$ λέει ότι $\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^b f(x)\,dx$ και άρα

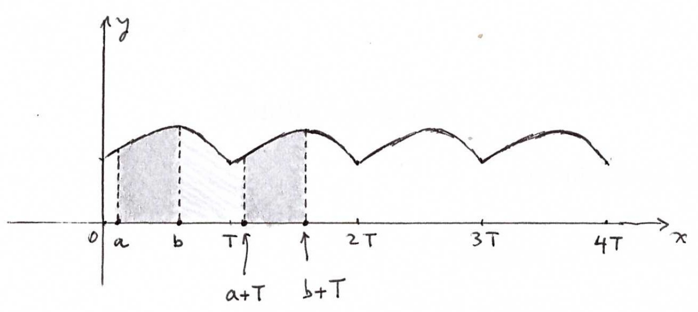
$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = 0.$$

12. *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ αποδείξτε ότι:*
(i) $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
(ii) $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$.
Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;
Λύση: (i) Στο $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$ γράφουμε $f(x) = f(x-T)$ (αφού η f έχει περίοδο T) και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \phi(x) = x - T$, για την οποία ισχύει $\phi'(x) = 1$ και $\phi(a+T) = a$, $\phi(b+T) = b$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx &= \int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a+T)}^{\phi(b+T)} f(y)\,dy \\ &= \int_a^b f(y)\,dy.\end{aligned}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+T} f(x)\,dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx \\ &= \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx + \int_b^{b+T} f(x)\,dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx.\end{aligned}$$



Το γεωμετρικό περιεχόμενο της (i) φαίνεται στο σχήμα. Λόγω περιοδικότητας, η συνάρτηση στο διάστημα $[a+T, b+T]$ είναι "ίδια" με την συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$. Άρα το εμβαδό κάτω από το γράφημά της στο διάστημα $[a+T, b+T]$ είναι ίσο με το εμβαδό κάτω από το γράφημά της στο διάστημα $[a, b]$. Αν προσθέσουμε στα δύο αυτά ίσα εμβαδά το εμβαδό κάτω από το γράφημα στο διάστημα $[b, a+T]$, τότε προκύπτει ότι τα εμβαδά κάτω από το γράφημα στα διαστήματα $[a, a+T]$ και $[b, b+T]$ είναι ίσα. Αυτό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της (ii).

13. *Με αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:*

$$\int x^3\cos(x^4)\,dx, \quad \int \cos^2 x\sin x\,dx, \quad \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,$$

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx, \quad \int x\sqrt{x+1}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{2x+1}\,dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx,$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos x)^3}\,dx, \quad \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int x\sqrt[3]{x-1}\,dx,$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx, \quad \int \sqrt{4-\sin x}\,\cos x\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}\,dx, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx, \quad \int x^2 e^{x^3}\,dx, \quad \int e^{3\sin x}\cos x\,dx, \quad \int \tan x\,dx,$$

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin(2x)\,dx, \quad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx, \quad \int \sin^3 x\,dx,$$

$$\int \sin^4 x\,dx, \quad \int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx, \quad \int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx, \quad \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{1}{4+x^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^2-x+2}\,dx,$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx, \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad \int \frac{1}{1+\cos x}\, dx \quad \int \frac{1}{2+\cos^2 x}\, dx.$$

Λύση: Θα δούμε πλήρως πώς υπολογίζονται επτά από τα ολοκληρώματα και για τα υπόλοιπα θα αναφέρω απλώς την αλλαγή μεταβλητής που πρέπει να γίνει. Σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί κανείς να βρει διαφορετικό δρόμο υπολογισμού με άλλες αλλαγές μεταβλητής και άλλες αλγεβρικές πράξεις.

(i) Για το $\int \tan x\, dx$ γράφουμε $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ και χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής $y = \cos x$. Έτσι

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{y}\, dy\Big|_{y=\cos x} = -(\log|y| + c)\Big|_{y=\cos x} = -\log|\cos x| + c.$$

(ii) Για το $\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = e^x$ και τότε

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1}{(1+y)y}\, dy\Big|_{y=e^x}.$$

Κατόπιν, έχουμε $\frac{1}{(1+y)y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$ και άρα

$$\int \frac{1}{(1+y)y}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy - \int \frac{1}{1+y}\, dy = \log|y| - \log|1+y| + c = \log\Big|\frac{y}{1+y}\Big| + c.$$

Επομένως,

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \Big(\log\Big|\frac{y}{1+y}\Big| + c\Big)\Big|_{y=e^x} = \log\frac{e^x}{1+e^x} + c.$$

Παρατηρήστε ότι στο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(1+y)y}\, dy$, το οποίο χρησιμοποιήσαμε, η μεταβλητή y ανήκει στο $(0, +\infty)$ αφού είναι $y = e^x$. Επομένως, στον υπολογισμό του θα μπορούσαμε να γράψουμε $\int \frac{1}{(1+y)y}\, dy = \int \frac{1}{y}\, dy - \int \frac{1}{1+y}\, dy = \log y - \log(1+y) + c = \log\frac{y}{1+y} + c$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε απόλυτες τιμές.

(iii) Για το $\int \sin^3 x\, dx$ γράφουμε $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \cos x$. Τότε

$$\int \sin^3 x\, dx = -\int (1-y^2)\, dy\Big|_{y=\cos x} = \big(\tfrac{1}{3}\, y^3 - y + c\big)\Big|_{y=\cos x} = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c.$$

(iv) Για το $\int \sin^4 x\, dx$ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής $y = 2x$ και βρίσκουμε

$$\int \sin^4 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\, dx = \tfrac{1}{8}\int (1-\cos y)^2\, dy\Big|_{y=2x}.$$

Τώρα

$$\int (1-\cos y)^2\, dy = \int dy - 2\int \cos y\, dy + \int \cos^2 y\, dy = y - 2\sin y + \int \cos^2 y\, dy.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\cos^2 y = \frac{1+\cos(2y)}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής $u = 2y$ και τότε

$$\begin{aligned}\int \cos^2 y\, dy &= \tfrac{1}{2}\int (1+\cos(2y))\, dy = \tfrac{1}{4}\int (1+\cos u)\, du\Big|_{u=2y} = \tfrac{1}{4}(u + \sin u + c)\Big|_{u=2y} \\ &= \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int (1-\cos y)^2\, dy = y - 2\sin y + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c = \tfrac{3}{2}y - 2\sin y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c$$

και, τέλος,

$$\int \sin^4 x\, dx = \tfrac{1}{8}\big(\tfrac{3}{2}y - 2\sin y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c\big)\Big|_{y=2x} = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x) + \tfrac{1}{32}\sin(4x) + c.$$

(v) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x}{2}$ και έχουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\Big|_{y=x/2} = (\arcsin y + c)\Big|_{y=x/2} = \arcsin\frac{y}{2} + c.$$

(vi) Για το $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x}{2}$ και έχουμε

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy\Big|_{y=x/2} = \frac{1}{2}(\arctan y + c)\Big|_{y=x/2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} + c.$$

(vii) Για το $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ χρησιμοποιούμε μία από τις προηγούμενες ταυτότητες στη μορφή $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x}{2}$ και βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x/2)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 y}\,dy\Big|_{y=x/2} = (\tan y + c)\Big|_{y=x/2} = \tan\frac{x}{2} + c.$$

Για το $\int x^3\cos(x^4)\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=x^4$.
Για το $\int \cos^2 x\sin x\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\cos x$.
Για το $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}$.
Για το $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=x^2+1$.
Για το $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=2x+1$.
Για το $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=x+1$.
Για το $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=2x+1$.
Για το $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=1-x$.
Για το $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=x^2+2x+5$.
Για το $\int \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos x)^3}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\sin x-\cos x$.
Για το $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}$.
Για το $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=x-1$.
Για το $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=1-x^6$.
Για το $\int \sqrt{4-\sin x}\,\cos x\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=4-\sin x$.
Για το $\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=2+\cos x$.
Για το $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$ γράφουμε $\frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\sin x$.
Για το $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}+1$.
Για το $\int x^2e^{x^3}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=x^3$.
Για το $\int e^{3\sin x}\cos x\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=3\sin x$.
Για το $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{1}{x}$.
Για το $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin(2x)\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=1+3\cos^2 x$ (και θυμόμαστε ότι $2\sin x\cos x=\sin(2x)$).
Για το $\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx$ γράφουμε $\frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{x^3}{x^4(x^4+1)}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=x^4$.
Για το $\int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=1+\log x$.
Για το $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}$ και κατόπιν $u=\arctan y$.
Για το $\int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$ γράφουμε $1-x-x^2=\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{2}{\sqrt{5}}(x+\frac{1}{2})$.
Για το $\int \frac{1}{x^2-x+2}\,dx$ γράφουμε $x^2-x+2=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{2}{\sqrt{7}}(x-\frac{1}{2})$.

Για το $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = e^x$.
Για το $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \arcsin x$.
Για το $\int \frac{1}{2+\cos^2 x}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \tan x$ (και θυμόμαστε ότι $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$) και κατόπιν $u = \sqrt{2/3}\,y$.

14. *Με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:*

$$\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx, \quad \int x^3e^{2x}\,dx, \quad \int x^3e^{-x^2}\,dx, \quad \int e^{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int x^2\sin x\,dx, \quad \int x\log x\,dx, \quad \int x^2\log^4 x\,dx, \quad \int \arcsin x\,dx,$$

$$\int \arctan x\,dx, \quad \int x^2\arcsin x\,dx, \quad \int x\arctan^2 x\,dx, \quad \int \arctan\sqrt{x}\,dx,$$

$$\int \cos^2 x\,dx, \quad \int \sin^4 x\,dx, \quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx, \quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx,$$

$$\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx, \quad \int \frac{xe^{\arctan x}}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx, \quad \int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$$

Λύση: Θα δούμε πλήρως πώς υπολογίζονται πέντε από τα ολοκληρώματα και για τα υπόλοιπα αναφέρω σχετικά πλήρεις υποδείξεις για το τί πρέπει να γίνει. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί κανείς να βρει διαφορετικό δρόμο υπολογισμού.
(i) Στο $\int x^3e^{-x^2}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = -x^2$ και έχουμε

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int ye^y\,dy\Big|_{y=-x^2}.$$

Κατόπιν,

$$\int ye^y\,dy = \int y(e^y)'\,dy = ye^y - \int y'e^y\,dy = ye^y - \int e^y\,dy = ye^y - e^y + c$$

και άρα

$$\int x^3e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}(ye^y - e^y + c)\Big|_{y=-x^2} = -\tfrac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

(ii) Για το $\int \arcsin x\,dx$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= \int x'\arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x(\arcsin x)'\,dx\\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.\end{aligned}$$

Τώρα, με αλλαγή μεταβλητής $y = 1 - x^2$ βρίσκουμε

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\Big|_{y=1-x^2} = (-\sqrt{y}+c)\Big|_{y=1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + c$$

και, επομένως,

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

(iii) Για το $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \int x(\tan x)'\,dx = x\tan x - \int x'\tan x\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx\\ &= x\tan x + \log|\cos x| + c,\end{aligned}$$

αφού βάσει της προηγούμενης άσκησης έχουμε ότι $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$.
(iv) Για το $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx &= -\tfrac{1}{2}\int x\big(\tfrac{1}{x^2+1}\big)'\,dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\int x'\,\frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\arctan x + c.\end{aligned}$$

(v) Για το $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = e^x$ και γράφουμε

$$\int \tfrac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx = \int \tfrac{\arctan y}{y^2}\,dy\big|_{y=e^x}.$$

Τώρα

$$\begin{aligned}\int \tfrac{\arctan y}{y^2}\,dy &= -\int (\tfrac{1}{y})' \arctan y\,dy = -\tfrac{\arctan y}{y} + \int \tfrac{1}{y}\,(\arctan y)'\,dy \\ &= -\tfrac{\arctan y}{y} + \int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\,dy\end{aligned}$$

και, με αλλαγή μεταβλητής $u = y^2$,

$$\int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\,dy = \int \tfrac{y}{y^2(y^2+1)}\,dy = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{u(u+1)}\,du\big|_{u=y^2}.$$

Επίσης,

$$\int \tfrac{1}{u(u+1)}\,du = \int \big(\tfrac{1}{u} - \tfrac{1}{u+1}\big)\,du = \log|u| - \log|u+1| + c = \log\big|\tfrac{u}{u+1}\big| + c.$$

Άρα

$$\int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\,dy = \tfrac{1}{2}\big(\log\big|\tfrac{u}{u+1}\big| + c\big)_{u=y^2} = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y^2}{y^2+1} + c$$

και

$$\int \tfrac{\arctan y}{y^2}\,dy = -\tfrac{\arctan y}{y} + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y^2}{y^2+1} + c$$

και, τέλος,

$$\int \tfrac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx = \big(-\tfrac{\arctan y}{y} + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y^2}{y^2+1} + c\big)\big|_{y=e^x} = -\tfrac{\arctan(e^x)}{e^x} + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + c.$$

Παρατηρήστε ότι στο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{u(u+1)}\,du$, το οποίο χρησιμοποιήσαμε, η μεταβλητή u ανήκει στο $(0,+\infty)$ αφού είναι $u = y^2 = e^{2x}$. Άρα στον υπολογισμό του θα μπορούσαμε να γράψουμε $\int \frac{1}{u(u+1)}\,du = \int \big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\big)\,du = \log u - \log(u+1) + c = \log\frac{u}{u+1} + c$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε απόλυτες τιμές.

Στο $\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y = -2x$ και στο $\int e^y \sin(\frac{3}{2}\,y)\,dy$ που θα προκύψει κάντε δύο φορές ολοκλήρωση κατά μέρη με $e^y = (e^y)'$.

Στο $\int x^3 e^{2x}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y = 2x$ και στο $\int y^3 e^y\,dy$ που θα προκύψει κάντε τρεις φορές ολοκλήρωση κατά μέρη με $e^y = (e^y)'$.

Στο $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x}$ και στο $\int y e^y\,dy$ που θα προκύψει κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $e^y = (e^y)'$.

Στο $\int x^2 \sin x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $\sin x = -(\cos x)'$ και ξανά ολοκλήρωση κατά μέρη με $\cos x = (\sin x)'$.

Στο $\int x \log x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $x = (\frac{x^2}{2})'$.

Στο $\int x^2 \log^4 x\,dx$ κάντε τέσσερις διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη με $x^2 = (\frac{x^3}{3})'$.

Στο $\int \arctan x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $1 = x'$ και μετά αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 1$.

Στο $\int x^2 \arcsin x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $x^2 = (\frac{x^3}{3})'$ και μετά αλλαγή μεταβλητής $y = 1 - x^2$.

Στο $\int x \arctan^2 x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $x = (\frac{x^2}{2})'$. Στο $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$ που θα προκύψει γράψτε $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ και χωρίστε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα. Το ένα είναι το $\int \arctan x\,dx$ που είδαμε προηγουμένως και στο άλλο κάντε αλλαγή μεταβλητής $y = \arctan x$.

Στο $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x}$, στο $\int y \arctan y\,dy$ που θα προκύψει κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $y = (\frac{y^2}{2})'$ και στο $\int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy$ που θα προκύψει γράψτε

$\frac{y^2}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{1+y^2}$.
Στο $\int \cos^2 x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $\cos^2 x = \cos x(\sin x)'$ και στο $\int \sin^2 x\,dx$ που θα προκύψει γράψτε $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
Στο $\int \sin^4 x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $\sin x = -(\cos x)'$ και στο $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$ που θα προκύψει γράψτε $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
Στο $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y = \arctan x$ και στο $\int e^y \sin y\,dy$ που θα προκύψει κάντε δύο ολοκληρώσεις κατά μέρη με $e^y = (e^y)'$.
Στο $\int \log(x + \sqrt{1+x^2})\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $1 = x'$ και στο $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ που θα προκύψει κάντε αλλαγή μεταβλητής $y = 1 + x^2$.

15. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:*

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx, \quad \int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx, \quad \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx, \quad \int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}\,dx,$$

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx, \quad \int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^4-1}\,dx, \quad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx, \quad \int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^4-2x^2+1}\,dx,$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^4+1}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^5+1}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^6+1}\,dx.$$

Λύση: (i) Το $x^2 + 2x - 3$ έχει τις ρίζες -3 και 1, οπότε $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$. Τώρα βρίσκουμε αριθμούς A, B ώστε να ισχύει

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{5x+3}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

για κάθε $x \neq -3, 1$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$5x + 3 = A(x-1) + B(x+3) = (A+B)x + (-A+3b)$$

για κάθε $x \neq -3, 1$. Προφανώς, αυτή η ισότητα ισχύει αν

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ -A + 3B &= 3 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A = 3$ και $B = 2$. Άρα

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{5x+3}{(x+3)(x-1)} = \frac{3}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

για κάθε $x \neq -3, 1$. Επομένως

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx = 3\int \frac{1}{x+3}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx = 3\log|x+3| + 2\log|x-1| + c.$$

(ii) Όπως στο (i) παραγοντοποιούμε: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Τώρα βρίσκουμε αριθμούς A, B ώστε να ισχύει

$$\frac{x+2}{x^2-4x+4} = \frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

για κάθε $x \neq 2$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$x + 2 = A(x-2) + B = Ax + (-2A + B)$$

για κάθε $x \neq 2$. Η ισότητα ισχύει αν

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ -2A + B &= 2 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A = 1$ και $B = 4$. Άρα

$$\tfrac{x+2}{x^2-4x+4} = \tfrac{x+2}{(x-2)^2} = \tfrac{1}{x-2} + \tfrac{4}{(x-2)^2}$$

για κάθε $x \neq 2$. Επομένως

$$\int \tfrac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx = \int \tfrac{1}{x-2}\,dx + 4\int \tfrac{1}{(x-2)^2}\,dx = \log|x-2| - \tfrac{4}{x-2} + c.$$

(iii) Παραγοντοποιούμε: $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$. Βρίσκουμε αριθμούς A, B, C ώστε να ισχύει

$$\tfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \tfrac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)} = \tfrac{A}{x} + \tfrac{B}{x-1} + \tfrac{C}{x+2}$$

για κάθε $x \neq -2, 0, 1$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 1 &= A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) \\ &= (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x + (-2A) \end{aligned}$$

για κάθε $x \neq -2, 0, 1$. Η ισότητα ισχύει αν

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ A + 2B - C &= 5 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$ και $C = -\frac{1}{2}$. Άρα

$$\tfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \tfrac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)} = \tfrac{1}{2x} + \tfrac{2}{x-1} - \tfrac{1}{2(x+2)}$$

για κάθε $x \neq -2, 0, 1$. Επομένως

$$\begin{aligned} \int \tfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} &= \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{x}\,dx + 2\int \tfrac{1}{x-1}\,dx - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{x+2}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log|x| + 2\log|x-1| - \tfrac{1}{2}\log|x+2| + c. \end{aligned}$$

Η διαδικασία είναι παρόμοια για όλα τα ολοκληρώματα που απομένουν, οπότε θα είμαι πιο σύντομος, τονίζοντας μόνο τις διαφορές ανάλογα με την περίπτωση.
(iv) Παραγοντοποιούμε: $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$. Αφού βρούμε A, B, C ώστε

$$\tfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1} = \tfrac{A}{x-1} + \tfrac{B}{x+1} + \tfrac{C}{(x+1)^2},$$

καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned} \int \tfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= A\int \tfrac{1}{x-1}\,dx + B\int \tfrac{1}{x+1}\,dx + C\int \tfrac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= A\log|x-1| + B\log|x+1| - \tfrac{C}{x+1} + c. \end{aligned}$$

(v) Παραγοντοποιούμε: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$. Το x^2+x+1 δεν παραγοντοποιείται. Βρίσκουμε A, B, C ώστε

$$\tfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \tfrac{A}{x-1} + \tfrac{B(x+\frac{1}{2})+C}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

και τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int \tfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx &= A\int \tfrac{1}{x-1}\,dx + B\int \tfrac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx + C\int \tfrac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\ &= A\log|x-1| + \tfrac{B}{2}\log\Big(\big(x+\tfrac{1}{2}\big)^2 + \tfrac{3}{4}\Big) + \tfrac{2C}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\big(x+\tfrac{1}{2}\big)\Big) + c. \end{aligned}$$

(vi) Βρίσκουμε A, B, C ώστε

$$\frac{x^2+1}{(2x-1)^3} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{(2x-1)^3}$$

και τότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx &= \frac{A}{2}\int \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,dx + \frac{B}{4}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2}\,dx + \frac{C}{8}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\,dx \\ &= \frac{A}{2}\log\left|x-\tfrac{1}{2}\right| - \frac{B}{4(x-\frac{1}{2})} - \frac{C}{16(x-\frac{1}{2})^2} + c.\end{aligned}$$

(vii) Παραγοντοποιούμε: $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

και τότε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4-1}\,dx &= A\int \frac{1}{x-1}\,dx + B\int \frac{1}{x+1}\,dx + C\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + D\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= A\log|x-1| + B\log|x+1| + \frac{C}{2}\log(x^2+1) + D\arctan x + c.\end{aligned}$$

(viii) Το $\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}$ είναι το μοναδικό κλάσμα στην άσκηση αυτή στο οποίο ο αριθμητής δεν έχει μικρότερο βαθμό από τον παρονομαστή. Γράφουμε

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4},$$

οπότε

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = x - \int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$$

Παραγοντοποιούμε: $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4)$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx &= A\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + B\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + C\int \frac{x}{x^2+4}\,dx + D\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{A}{2}\log(x^2+1) + B\arctan x + \frac{C}{2}\log(x^2+4) + \frac{D}{2}\arctan\frac{x}{2} + c.\end{aligned}$$

(ix) Παραγοντοποιούμε: $(x^2-4x+4)(x^2-4x+5) = (x-2)^2((x-2)^2+1)$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C(x-2)+D}{(x-2)^2+1}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx &= A\int \frac{1}{x-2}\,dx + B\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + C\int \frac{x-2}{(x-2)^2+1}\,dx \\ &\quad + D\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx \\ &= A\log|x-2| - \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2}\log((x-2)^2+1) \\ &\quad + D\arctan(x-2) + c.\end{aligned}$$

(x) Παραγοντοποιούμε: $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x-1)(x+1)^3$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx &= A\int \frac{1}{x-1}\,dx + B\int \frac{1}{x+1}\,dx + C\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + D\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx \\ &= A\log|x-1| + B\log|x+1| - \frac{C}{x+1} - \frac{D}{2(x+1)^2} + c.\end{aligned}$$

(xi) Παραγοντοποιούμε: $x^4-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2$. Βρίσκουμε A,B,C,D ώστε

$$\tfrac{1}{x^4-2x^2+1}=\tfrac{A}{x-1}+\tfrac{B}{(x-1)^2}+\tfrac{C}{x+1}+\tfrac{D}{(x+1)^2}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\int\tfrac{1}{x^4-2x^2+1}\,dx&=A\int\tfrac{1}{x-1}\,dx+B\int\tfrac{1}{(x-1)^2}\,dx+C\int\tfrac{1}{x+1}\,dx+D\int\tfrac{1}{(x+1)^2}\,dx\\&=A\log|x-1|-\tfrac{B}{x-1}+C\log|x+1|-\tfrac{D}{x+1}+c.\end{aligned}$$

(xii) Είναι: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$. Βρίσκουμε A,B,C,D ώστε

$$\tfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\tfrac{A(x+1)+B}{(x+1)^2+1}+\tfrac{C(x+1)+D}{((x+1)^2+1)^2}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\int\tfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx&=A\int\tfrac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx+B\int\tfrac{1}{(x+1)^2+1}\,dx+C\int\tfrac{x+1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx\\&\quad+D\int\tfrac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx\\&=\tfrac{A}{2}\log((x+1)^2+1)+B\arctan(x+1)-\tfrac{C}{2((x+1)^2+1)}\\&\quad+D\int\tfrac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Μένει να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα. Αρκεί να βρούμε το $\int\tfrac{1}{(y^2+1)^2}\,dy$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int\tfrac{1}{(y^2+1)^2}\,dy&=\int\tfrac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^2}\,dy=\int\tfrac{1}{y^2+1}\,dy-\int\tfrac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy\\&=\arctan y-\int y\,\tfrac{y}{(y^2+1)^2}\,dy=\arctan y+\tfrac{1}{2}\int y\big(\tfrac{1}{y^2+1}\big)'\,dy\\&=\arctan y+\tfrac{y}{2(y^2+1)}-\tfrac{1}{2}\int y'\,\tfrac{1}{y^2+1}\,dy\\&=\arctan y+\tfrac{y}{2(y^2+1)}-\tfrac{1}{2}\int\tfrac{1}{y^2+1}\,dy\\&=\tfrac{y}{2(y^2+1)}+\tfrac{1}{2}\arctan y+c.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int\tfrac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx=\int\tfrac{1}{(y^2+1)^2}\,dy\Big|_{y=x+1}=\tfrac{x+1}{2((x+1)^2+1)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x+1)+c$$

και, επιτέλους (!!!!!!!!!!!!),

$$\begin{aligned}\int\tfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx&=\tfrac{A}{2}\log((x+1)^2+1)+B\arctan(x+1)-\tfrac{C}{2((x+1)^2+1)}\\&\quad+\tfrac{D(x+1)}{2((x+1)^2+1)}+\tfrac{D}{2}\arctan(x+1)+c.\end{aligned}$$

(xiii) Το x^4+1 είναι “πονηρό”:

$$\begin{aligned}x^4+1&=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)\\&=\big(\big(x+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)^2+\tfrac{1}{2}\big)\big(\big(x-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)^2+\tfrac{1}{2}\big).\end{aligned}$$

Κατά τα άλλα, προχωράμε όπως στο (viii).
Για τα τελευταία δύο ολοκληρώματα, αναφέρω μόνο την παραγοντοποίηση των x^5+1 και x^6+1:

$$x^5+1=(x+1)\big(x^2-\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\big)\big(x^2+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\big),$$
$$x^6+1=(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)(x^2-\sqrt{3}\,x+1).$$

Αποδείξτε, ξεκινώντας από την *αριστερή* μεριά των δύο ταυτοτήτων, τις παραγοντοποιήσεις και μετά υπολογίστε τα δύο ολοκληρώματα.

16. *Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των* $\sin x$ *και* $\cos x$*:*

$$\int \frac{1}{(1+\cos x)^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{1+2\sin x}\,dx, \quad \int \frac{1}{5+3\cos x}\,dx, \quad \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx.$$

Λύση: Σε όλα τα ολοκληρώματα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du.$$

Για παράδειγμα, με το $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$ βρίσκουμε

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du\Big|_{u=\tan(x/2)}.$$

Χωρίζουμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{1+u^2} + \frac{u}{1+u^2} - \frac{1}{1+u}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du = \arctan u + \frac{1}{2}\log(1+u^2) - \log|1+u| + c$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \big(\arctan u + \tfrac{1}{2}\log(1+u^2) - \log|1+u| + c\big)\big|_{u=\tan(x/2)}\\ &= \arctan(\tan\tfrac{x}{2}) - \log\big|\cos\tfrac{x}{2}\big| - \log\big|1+\tan\tfrac{x}{2}\big| + c\\ &= \arctan(\tan\tfrac{x}{2}) - \log\big|\sin\tfrac{x}{2}+\cos\tfrac{x}{2}\big| + c.\end{aligned}$$

17. *Βρείτε τα ολοκληρώματα:*

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Λύση: (i) Σε ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{x^2-1}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{u^2+1}{2u}$.
Αν το x βρίσκεται στο $[1,+\infty)$ θεωρούμε ότι και το u βρίσκεται στο $[1,+\infty)$ και τότε το u δίνεται από τον τύπο $u = x + \sqrt{x^2-1}$ και έχουμε και τις σχέσεις και $\sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2u}$ και $dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\,du$.
Αν το x βρίσκεται στο $(-\infty,-1]$ θεωρούμε ότι και το u βρίσκεται στο $(-\infty,-1]$ και τότε το u δίνεται από τον τύπο $u = x - \sqrt{x^2-1}$ και έχουμε και τις σχέσεις και $\sqrt{x^2-1} = \frac{1-u^2}{2u}$ και $dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\,du$.
Άρα για το συγκεκριμένο $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ μετά από απλοποιήσεις έχουμε δύο περιπτώσεις.
Αν το x βρίσκεται στο $[1,+\infty)$, τότε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\,dx &= \int \big(\tfrac{u}{4} - \tfrac{1}{2u} + \tfrac{1}{4u^3}\big)\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \big(\tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{1}{2}\log|u| - \tfrac{1}{8u^2} + c\big)\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \tfrac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-1})^2 - \tfrac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| - \tfrac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c.\end{aligned}$$

Αν το x βρίσκεται στο $(-\infty,-1]$, τότε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\,dx &= -\int \big(\tfrac{u}{4} - \tfrac{1}{2u} + \tfrac{1}{4u^3}\big)\,du\big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}}\\ &= \big(-\tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{2}\log|u| + \tfrac{1}{8u^2} + c\big)\big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}}\\ &= -\tfrac{1}{8}(x-\sqrt{x^2-1})^2 + \tfrac{1}{2}\log|x-\sqrt{x^2-1}| + \tfrac{1}{8(x-\sqrt{x^2-1})^2} + c.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1}) = 1$ και άρα τα δύο αποτελέσματα που προέκυψαν είναι ταυτόσημα (απλώς διαφέρουν τα πεδία ορισμού τους: το $[1,+\infty)$ για το ένα και το $(-\infty,-1]$ για το άλλο). Με άλλα λόγια:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-1})^2 - \tfrac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| - \tfrac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c$$

για $x \in (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(ii) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ η αλλαγή μεταβλητής στο (i), δηλαδή η $x = \frac{u^2+1}{2u}$, δίνει

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \tfrac{1}{u}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}} = \log|x+\sqrt{x^2-1}| + c \qquad \text{για } x\in[1,+\infty),$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\int \tfrac{1}{u}\,du\Big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}} = -\log|x-\sqrt{x^2-1}| + c \qquad \text{για } x\in(-\infty,-1].$$

Όπως στο (i), οι δύο λύσεις είναι ταυτόσημες, οπότε

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2-1}| + c \qquad \text{για } x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

(iii) Σε ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{1-x^2}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{2u}{u^2+1}$. Το x βρίσκεται στο διάστημα $[-1,1]$ και θεωρούμε ότι και το u βρίσκεται στο $[-1,1]$, οπότε το u δίνεται από τον τύπο $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Έχουμε και τις σχέσεις $\sqrt{1-x^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $dx = \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,du$.

Άρα για το $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx$ μετά από απλοποιήσεις έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \tfrac{1-u^2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})} = \int \big(-1+\tfrac{2}{1+u^2}\big)\,du\Big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}\\ &= (-u+2\arctan u + c)\big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}\\ &= -\tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + 2\arctan\tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + c \qquad \text{για } x\in[-1,1].\end{aligned}$$

(iv) Σε ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{x^2+1}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{u^2-1}{2u}$ με $u>0$.

Με αυτήν την αλλαγή μεταβλητής προκύπτει $u = x+\sqrt{x^2+1}$ και $\sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2u}$ και $dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du$.

Άρα για το $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ μετά από απλοποιήσεις έχουμε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \big(\tfrac{u}{4}+\tfrac{1}{2u}+\tfrac{1}{4u^3}\big)\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \big(\tfrac{1}{8}u^2+\tfrac{1}{2}\log u - \tfrac{1}{8u^2}+c\big)\big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \tfrac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+1})^2 + \tfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}) - \tfrac{1}{8(x+\sqrt{x^2+1})^2} + c.\end{aligned}$$

(v) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ η αλλαγή μεταβλητής στο (iv) δίνει

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \tfrac{1}{u}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}} = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + c.$$

(vi) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx$ γράφουμε $x^2-x-2 = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})$. Μετά από απλοποιήσεις βρίσκουμε

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx = \int \tfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})}.$$

Στο (ii) βρήκαμε το $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$ και καταλήγουμε στο

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx = \big(\log(t+\sqrt{t^2-1})+c\big)\Big|_{t=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})} = \log\big(x-\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\big) + c.$$

(vii) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \sqrt{x-1}$ και βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int \frac{t}{t+\sqrt{t^2+2}}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x-1}}.$$

Κατόπιν, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $s = \frac{t}{\sqrt{2}}$ και έχουμε

$$2\int \frac{t}{t+\sqrt{t^2+2}}\,dt = 2\sqrt{2}\int \frac{s}{s+\sqrt{s^2+1}}\,ds\Big|_{s=t/\sqrt{2}}.$$

Τέλος, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής του (iv), δηλαδή $s = \frac{u^2-1}{2u}$ με $u > 0$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{s}{s+\sqrt{s^2+1}}\,ds &= \int \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4u^4}\right) du\Big|_{u=s+\sqrt{s^2+1}}\\ &= \left(\tfrac{1}{4}u + \tfrac{1}{12u^3} + c\right)\Big|_{u=s+\sqrt{s^2+1}}\\ &= \tfrac{1}{4}(s+\sqrt{s^2+1}) + \tfrac{1}{12(s+\sqrt{s^2+1})^3} + c.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{2} + \frac{2}{3(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^3} + c.$$