Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις τρίτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ορίων, δηλαδή παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας το κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του M, όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι*

$$(5/3)^n \to +\infty, \quad n^2 + (-1)^n n \to +\infty, \quad \tfrac{n^3+1}{n+1} \to +\infty, \quad n(2+\cos n) \to +\infty.$$

Λύση: (i) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{5}{3}\right)^n > M.$$

Λύνουμε την ανισότητα $(5/3)^n > M$ ως προς n:

$$\left(\tfrac{5}{3}\right)^n > M \quad \Leftrightarrow \quad n > \log_{5/3} M.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \log_{5/3} M.$$

Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\log_{5/3} M$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\log_{5/3} M$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{cases} [\log_{5/3} M] + 1, & \text{αν } M \geq 1 \\ 1, & \text{αν } 0 < M < 1 \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \begin{cases} [\log_{5/3} M] + 1, & \text{αν } M \geq 1 \\ 1, & \text{αν } 0 < M < 1 \end{cases}$$

(ii) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n^2 + (-1)^n n > M.$$

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα $n^2 + (-1)^n n > M$ είναι σχετικά δύσκολο να λυθεί ως προς n επειδή έχει διπλό τυπο: $n^2 + n$ αν το n είναι άρτιο και $n^2 - n$ αν το n είναι περιττό. Βρίσκουμε μία ποσότητα μικρότερη και απλούστερη από την $n^2 + (-1)^n n$:

$$n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n > M.$$

Λύνουμε την ανισότητα $n^2 - n > M$ ως προς n:

$$n^2 - n > M \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - n - M > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < \tfrac{1-\sqrt{1+4M}}{2} \text{ ή } n > \tfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}.$$

Επομένως

$$n > \tfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2 - n > M.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$ δίνεται από τον τύπο $[\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}]+1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}\right]+1.$$

(iii) Παίρνουμε τυχαίο $M>0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n^3+1}{n+1} > M.$$

Η ανισότητα $\frac{n^3+1}{n+1} > M$ δεν λύνεται ως προς n επειδή καταλήγει σε ανισότητα τρίτου βαθμού ως προς n. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μικρότερη και απλούστερη από την $\frac{n^3+1}{n+1}$:

$$\frac{n^3+1}{n+1} \geq \frac{n^3}{n+n} = \frac{n^2}{2}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2}{2} > M.$$

Λύνουμε την ανισότητα $\frac{n^2}{2} > M$ ως προς n:

$$\frac{n^2}{2} > M \quad \Leftrightarrow \quad n < -\sqrt{2M} \text{ ή } n > \sqrt{2M}.$$

Επομένως

$$n > \sqrt{2M} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2}{2} > M.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \sqrt{2M}$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\sqrt{2M}$ δίνεται από τον τύπο $[\sqrt{2M}]+1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\sqrt{2M}\right]+1.$$

(iv) Παίρνουμε τυχαίο $M>0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n(2+\cos n) > M.$$

Η ανισότητα $n(2+\cos n) > M$ δεν λύνεται ως προς n λόγω της μορφής που έχει. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μικρότερη και απλούστερη από την $n(2+\cos n)$:

$$n(2+\cos n) \geq n(2-1) = n.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > M.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό M δίνεται από τον τύπο $[M]+1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq [M]+1.$$

2. *Διερευνήστε την ύπαρξη και την τιμή του ορίου* $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x)^n}{(1-x)^n}$ *ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου* x.

   Λύση: Η παράσταση $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^n}$ γράφεται $(\frac{1+x}{1-x})^n$, οπότε η ακολουθία μας είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1+x}{1-x}$. Η συμπεριφορά της είναι γνωστή και εξαρτάται από την σχετική θέση του λόγου ως προς τους αριθμούς -1 και 1. Κάνοντας την απαιτούμενη διερεύνηση, καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^n} \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } 0<x<1 \\ \to 1, & \text{αν } x=0 \\ \to 0, & \text{αν } x<0 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } x>1 \end{cases}$$

3. *Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ορίων, αποδείξτε ότι*

$$\big(\tfrac{1}{n}+(-1)^n n\big)^4 \to +\infty, \quad \big(\tfrac{1}{3}+\tfrac{(-1)^n}{2}\big)^n \to 0, \quad \tfrac{2}{3}+\tfrac{2^2}{3^2}+\cdots+\tfrac{2^n}{3^n} \to 2.$$

Λύση: (i) Για την υπακολουθία των περιττών δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{2k-1}-(2k-1)\big)^4 \to (0-(+\infty))^4 = (-\infty)^4 = +\infty.$$

Για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{2k}+2k\big)^4 \to (0+(+\infty))^4 = (+\infty)^4 = +\infty.$$

Άρα

$$\big(\tfrac{1}{n}+(-1)^n n\big)^4 \to +\infty.$$

(ii) Για την υπακολουθία των περιττών δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\big)^{2k-1} = \big(-\tfrac{1}{6}\big)^{2k-1} = \big(\tfrac{1}{36}\big)^k\big(-\tfrac{1}{6}\big)^{-1} \to 0(-6)=0.$$

Για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\big)^{2k} = (\tfrac{5}{6})^{2k} = \big(\tfrac{25}{36}\big)^k \to 0.$$

Άρα

$$\big(\tfrac{1}{3}+\tfrac{(-1)^n}{2}\big)^n \to 0.$$

(iii) Χρησιμοποιούμε την αλγεβρική ταυτότητα

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{αν } x\neq 1 \\ n+1, & \text{αν } x=1 \end{cases}$$

Έχουμε ότι

$$\tfrac{2}{3}+\tfrac{2^2}{3^2}+\cdots+\tfrac{2^n}{3^n} = \tfrac{2}{3}\big(1+\tfrac{2}{3}+\cdots+\big(\tfrac{2}{3}\big)^{n-1}\big) = \tfrac{2}{3}\,\tfrac{1-(2/3)^n}{1-(2/3)} = 2\big(1-\big(\tfrac{2}{3}\big)^n\big) \to 2(1-0)=2.$$

4. *Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστούς όρους:*

$$\tfrac{1+(-1)^n(n+2)}{3n}, \quad 3^{(-1)^n}, \quad 3^{(-1)^n n}, \quad \big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{2(-1)^n}{3}\big)^n.$$

Λύση: (i) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$\tfrac{1-(2k-1+2)}{3(2k-1)} = \tfrac{-2k}{6k-3} = \tfrac{-2}{6-(3/k)} \to -\tfrac{1}{3},$$

$$\tfrac{1+(2k+2)}{3(2k)} = \tfrac{2k+3}{6k} = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2k} \to \tfrac{1}{3}.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.

(ii) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$3^{-1} \to 3^{-1} = \tfrac{1}{3},$$

$$3^{1} \to 3^{1} = 3.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.

(iii) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$3^{-(2k-1)} = \tfrac{1}{3^{2k-1}} = \tfrac{3}{9^k} \to 0,$$

$$3^{2k} = 9^k \to +\infty.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.

(iv) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{-2}{3})^{2k-1} = (-\tfrac{1}{6})^{2k-1} = -6\big(\tfrac{1}{36}\big)^k \to 0,$$

$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3})^{2k} = (\tfrac{7}{6})^{2k} = \big(\tfrac{49}{36}\big)^k \to +\infty.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.

5. *(i) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.*
(ii) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n y_n)$ να έχει όριο.
Λύση: (i) Παίρνουμε οποιαδήποτε (x_n) η οποία δεν έχει όριο και ως (y_n) παίρνουμε την αντίθετη της (x_n), δηλαδή $y_n = -x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα, $x_n = (-1)^n$ και $y_n = -(-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι (x_n) και (y_n) δεν έχουν όριο, αλλά:

$$x_n + y_n = 0 \to 0.$$

(ii) Παίρνουμε οποιαδήποτε (x_n) η οποία δεν έχει όριο και ως (y_n) παίρνουμε την αντίστροφη της (x_n), δηλαδή $y_n = \frac{1}{x_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πρέπει μόνο να προσέξουμε ώστε να είναι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα, $x_n = (-1)^n$ και $y_n = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι (x_n) και (y_n) δεν έχουν όριο, αλλά:

$$x_n y_n = 1 \to 1.$$