Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις πέμπτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Ποιά είναι τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων* $\{-1\}$, $(-1, 4]$, $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup \{7\}$, $\mathbb{N}$, $\{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$*;*

   Λύση: Το σύνολο $\{-1\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

   Τα σημεία συσσώρευσης του $(-1, 4]$ είναι τα σημεία του $[-1, 4]$.

   Τα σημεία συσσώρευσης του $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup \{7\}$ είναι τα σημεία του $[-\infty, 3]$.

   Το $\mathbb{N}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

   Τα μόνο σημείο συσσώρευσης του $\{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι το 0.

2. *Ποιά από τα παρακάτω όρια έχουν νόημα;* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$, $\lim_{x\to 0-} \log \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\cos x}$, $\lim_{x\to+\infty} \log \sin x$. *Προσέξτε: δεν εξετάζουμε το αν υπάρχουν τα όρια αυτά ή το ποιά είναι η τιμή τους. Εξετάζουμε, απλώς, αν έχουν νόημα.*

   Λύση: (i) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ είναι το $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. Το 1 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού: δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε το 1 με στοιχεία x του πεδίου ορισμού (ώστε να ορίζεται το $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$) διαφορετικά από το 1. Άρα το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ δεν έχει νόημα.

   Να το δούμε και διαφορετικά. Επειδή $\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x) = -2$, όταν το x είναι κοντά στο 1 τότε το $x^2 - 3x$ είναι κοντά στο -2 και άρα είναι < 0 και άρα δεν ορίζεται το $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$. Άρα δεν έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$.

   (ii) Το πεδίο ορισμού της $\log \frac{1}{x}$ είναι το $(0, +\infty)$. Το 0 δεν είναι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού: δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε το 0 με στοιχεία x του πεδίου ορισμού (ώστε να ορίζεται το $\log \frac{1}{x}$) διαφορετικά από το 0. Άρα το όριο $\lim_{x\to 1} \log \frac{1}{x}$ δεν έχει νόημα.

   Να το δούμε και διαφορετικά. Επειδή $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, όταν το x είναι κοντά στο 0 από τα αριστερά του τότε το $\frac{1}{x}$ είναι κοντά στο $-\infty$ και άρα είναι < 0 και άρα δεν ορίζεται το $\log \frac{1}{x}$. Άρα δεν έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to 0-} \log \frac{1}{x}$.

   (iii) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{\cos x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$. Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού: μπορούμε να προσεγγίσουμε το $+\infty$ με στοιχεία x του πεδίου ορισμού (ώστε να ορίζεται το $\frac{1}{\cos x}$). Άρα το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\cos x}$ έχει νόημα.

   (iv) Το πεδίο ορισμού της $\log \sin x$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$. Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού: μπορούμε να προσεγγίσουμε το $+\infty$ με στοιχεία x του πεδίου ορισμού (ώστε να ορίζεται το $\log \sin x$). Άρα το όριο $\lim_{x\to 1} \log \sin x$ έχει νόημα.

3. *Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι*

$$\lim_{x\to 2}(2x + 4) = 8, \quad \lim_{x\to 2} \log x = \log 2, \quad \lim_{x\to 1+} \tfrac{1}{1-x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \tfrac{x-3}{2x+1} = \tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{x+1} = \tfrac{1}{2}.$$

   Λύση: (i) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(2x + 4) - 8| < \epsilon.$$

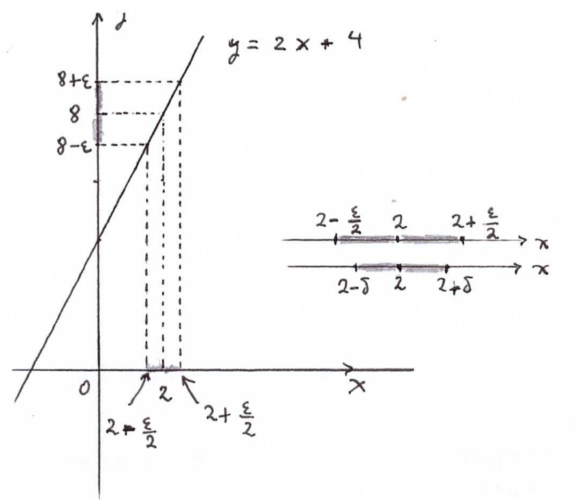
   Λύνουμε την $|(2x + 4) - 8| < \epsilon$ ως προς το x:

$$|(2x + 4) - 8| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |2x - 4| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Τώρα είναι προφανές ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε δ που ικανοποιεί την $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ τότε:

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-2| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad |(2x+4)-8| < \epsilon.$$

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται πώς βρίσκουμε $\delta > 0$ το οποίο αντιστοιχεί στο $\epsilon > 0$ χρησιμοποιώντας το γράφημα της συνάρτησης.



Σημειώνουμε το διάστημα $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$ στον y-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = 2x+4$. Με τη βοήθεια του γραφήματος βλέπουμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2-\frac{\epsilon}{2}, 2+\frac{\epsilon}{2})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = 2x+4$ βρίσκεται στο $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$, τότε το διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ περιέχεται στο $(2-\frac{\epsilon}{2}, 2+\frac{\epsilon}{2})$ και επομένως αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = 2x+4$ βρίσκεται στο $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$.
(ii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\log x - \log 2| < \epsilon.$$

Λύνουμε την $|\log x - \log 2| < \epsilon$ ως προς το x:

$$|\log x - \log 2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \log 2 - \epsilon < \log x < \log 2 + \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{-\epsilon} < x < 2e^{\epsilon}.$$

Ο αριθμός 2 είναι ανάμεσα στους $2e^{-\epsilon}$ και $2e^{\epsilon}$:

$$2e^{-\epsilon} < 2 < 2e^{\epsilon}.$$

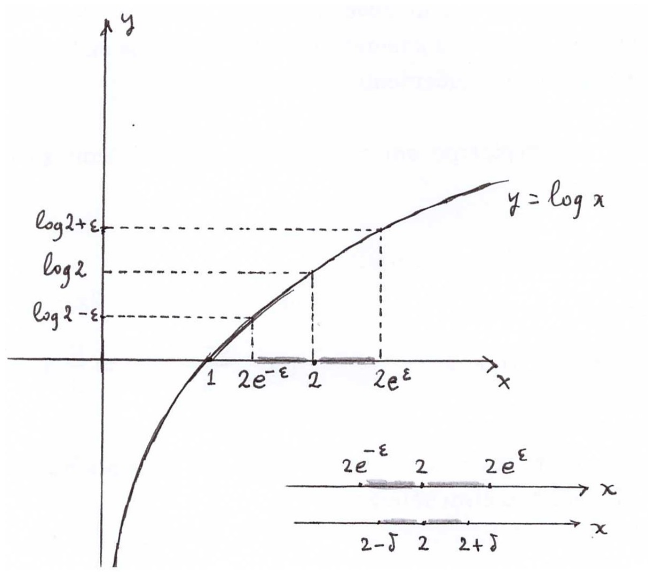
Η απόσταση του 2 από το $2e^{\epsilon}$ είναι ίση με $2e^{\epsilon} - 2$ και η απόστασή του από το $2e^{-\epsilon}$ είναι ίση με $2 - 2e^{-\epsilon}$. Η μικρότερη από τις δύο αποστάσεις είναι η δεύτερη:

$$2 - 2e^{-\epsilon} < 2e^{\epsilon} - 2.$$

Αυτό μπορείτε να το αποδείξετε πολύ εύκολα. (Πείτε $t = e^{\epsilon}$. Τότε $t > 1$ και η ανισότητα γράφεται $t + \frac{1}{t} > 2$ και καταλήγει στην $(t-1)^2$.)
Δηλαδή το κοντινότερο στο 2 από τα $2e^{-\epsilon}$ και $2e^{\epsilon}$ είναι το πρώτο. Τώρα είναι προφανές ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε δ που ικανοποιεί την $0 < \delta \leq 2 - 2e^{-\epsilon}$ τότε:

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad 2e^{-\epsilon} < x < 2e^{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad |\log x - \log 2| < \epsilon.$$

Στο σχήμα που ακολουθεί βρίσκουμε, μέσω του γραφήματος της συνάρτησης, $\delta > 0$ το οποίο αντιστοιχεί στο $\epsilon > 0$.



Σημειώνουμε το διάστημα $(\log 2-\epsilon, \log 2+\epsilon)$ στον y-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \log x$. Βλέπουμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2e^{-\epsilon}, 2e^{\epsilon})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(\log 2-\epsilon, \log 2+\epsilon)$. Το διάστημα $(2e^{-\epsilon}, 2e^{\epsilon})$ δεν είναι συμμετρικό ως προς το 2. Το κοντινότερο προς το 2 άκρο του διαστήματος είναι το $2e^{-\epsilon}$. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq 2-2e^{-\epsilon}$, τότε το διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ περιέχεται στο $(2e^{-\epsilon}, 2e^{\epsilon})$ και επομένως αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(\log 2-\epsilon, \log 2+\epsilon)$.

(iii) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$1 < x < 1+\delta \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{1-x} < -M.$$

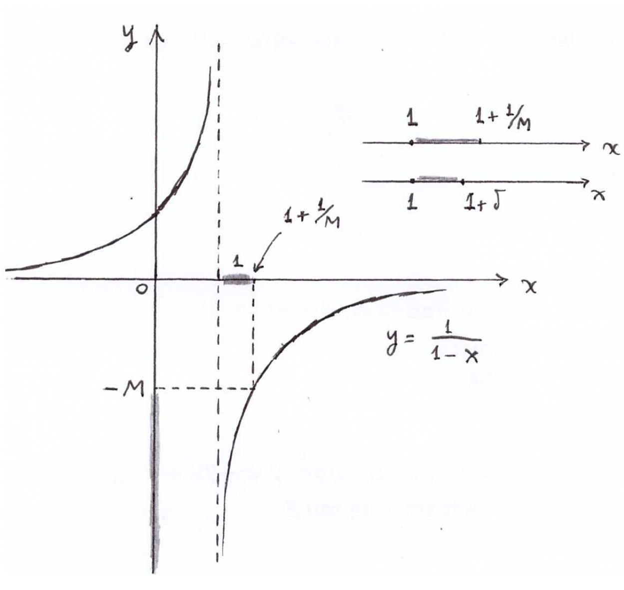
Λύνουμε την $\frac{1}{1-x} < -M$ ως προς το x:

$$\tfrac{1}{1-x} < -M \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{M} < 1-x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 1+\tfrac{1}{M}.$$

Τώρα είναι προφανές ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε δ που ικανοποιεί την $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ τότε:

$$1 < x < 1+\delta \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 1+\tfrac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{1-x} < -M.$$

Όπως στα προηγούμενα θέματα βρίσκουμε, με το γράφημα της συνάρτησης, $\delta > 0$ το οποίο αντιστοιχεί στο $M > 0$.



Σημειώνουμε το διάστημα $(-\infty, -M)$ στον y-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \frac{1}{1-x}$. Τώρα αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(1, 1 + \frac{1}{M})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{1-x}$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$, τότε το διάστημα $(1, 1+\delta)$ περιέχεται στο $(1, 1 + \frac{1}{M})$ και επομένως αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(1, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{1-x}$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$.
(iv) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $N > 0$ ώστε:

$$x > N \quad \Rightarrow \quad e^x > M.$$

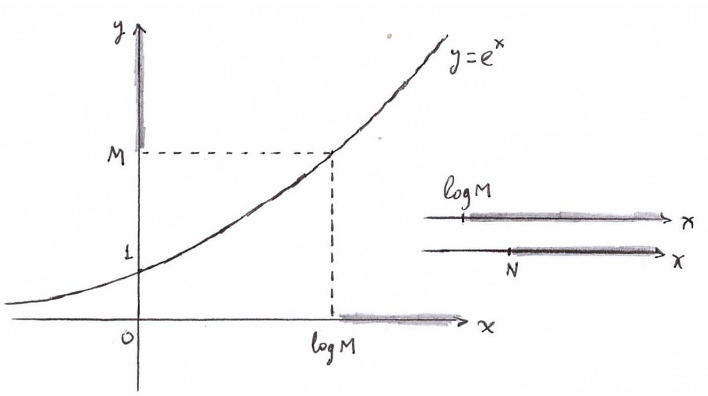
Λύνουμε την $e^x > M$ ως προς το x:

$$e^x > M \quad \Leftrightarrow \quad x > \log M.$$

Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε N που ικανοποιεί την $N \geq \begin{cases} \log M, & \text{αν } M > 1 \\ 1, & \text{αν } 0 < M \leq 1 \end{cases}$ τότε είναι $N > 0$ και:

$$x > N \quad \Rightarrow \quad x > \log M \quad \Rightarrow \quad e^x > M.$$

Στο σχήμα βλέπουμε την λύση με την βοήθεια του γραφήματος της συνάρτησης.



Σημειώνουμε το διάστημα $(M, +\infty)$ στον y-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = e^x$. Παρατηρούμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(\log M, +\infty)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = e^x$ βρίσκεται στο $(M, +\infty)$. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε $N > 0$ με $N \geq \log M$, τότε το $(N, +\infty)$ περιέχεται στο $(\log M, +\infty)$ οπότε αν το x βρίσκεται στο $(N, +\infty)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = e^x$ βρίσκεται στο $(M, +\infty)$.
(v) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \log x < -M.$$

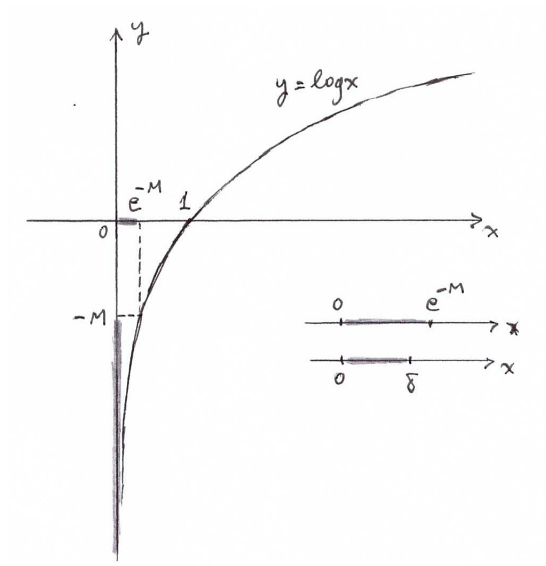
Λύνουμε την $\log x < -M$ ως προς το x:

$$\log x < -M \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < e^{-M}.$$

Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε δ που ικανοποιεί την $0 < \delta \leq e^{-M}$ τότε:

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < x < e^{-M} \quad \Rightarrow \quad \log x < -M.$$

Να και η λύση μέσω του γραφήματος της συνάρτησης.
Σημειώνουμε το διάστημα $(-\infty, -M)$ στον y-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \log x$. Παρατηρούμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(0, e^{-M})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ με $\delta \leq e^{-M}$, τότε το $(0, \delta)$ περιέχεται στο $(0, e^{-M})$ οπότε αν το x βρίσκεται στο $(0, \delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$.



(vi) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $N > 0$ ώστε:

$$x < -N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-3}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

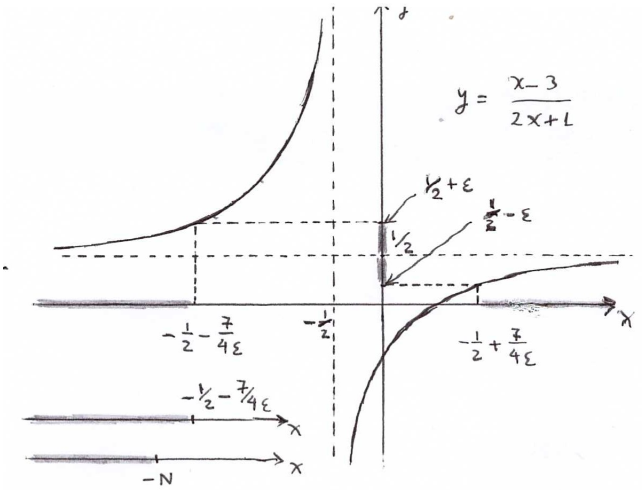
Λύνουμε την $|\frac{x-3}{2x+1} - \frac{1}{2}| < \epsilon$ ως προς το x:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x-3}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{7}{2|2x+1|} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow \quad |2x+1| > \frac{7}{2\epsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x+1 < -\frac{7}{2\epsilon} \quad \text{ή} \quad \frac{7}{2\epsilon} < 2x+1 \\
&\Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{2} - \frac{7}{4\epsilon} \quad \text{ή} \quad -\frac{1}{2} + \frac{7}{4\epsilon} < x.
\end{aligned}$$

Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε $N \geq \frac{1}{2} + \frac{7}{4\epsilon}$ τότε:

$$x < -N \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{1}{2} - \frac{7}{4\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-3}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Ας λύσουμε το πρόβλημα και μέσω του γραφήματος της συνάρτησης.



Σημειώνουμε το διάστημα $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$ στον y-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \frac{x-3}{2x+1}$. Τώρα, αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{7}{4\epsilon})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{x-3}{2x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$ και μάλιστα στο μικρότερο διάστημα $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon)$.

(Επίσης, αν το x βρίσκεται στο $(-\frac{1}{2}+\frac{7}{4\epsilon},+\infty)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y=\frac{x-3}{2x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2})$ και άρα στο $(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon)$. Όμως θα αγνοήσουμε το $(-\frac{1}{2}+\frac{7}{4\epsilon},+\infty)$, αφού μας ενδιαφέρει διάστημα της μορφής $(-\infty,-N)$). Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε $N>0$ με $N\geq\frac{1}{2}+\frac{7}{4\epsilon}$, τότε το $(-\infty,-N)$ περιέχεται στο $(-\infty,-\frac{1}{2}-\frac{7}{4\epsilon})$ και άρα αν το x βρίσκεται στο $(-\infty,-N)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y=\frac{x-3}{2x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon)$.

(vii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon>0$ και πρέπει να βρούμε $\delta>0$ ώστε:

$$0<|x-1|<\delta \quad\Rightarrow\quad \left|\tfrac{1}{x+1}-\tfrac{1}{2}\right|<\epsilon.$$

Προσπαθούμε να λύσουμε την $|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}|<\epsilon$ ως προς το x:

$$\left|\tfrac{1}{x+1}-\tfrac{1}{2}\right|<\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|}<\epsilon.$$

Αν και είναι δυνατό να συνεχίσουμε την επίλυση της ανισότητας με αλγεβρικό τρόπο (θα το κάνουμε στο τέλος όταν δούμε την λύση μέσω του γραφήματος της συνάρτησης), οι πράξεις είναι αρκετά άβολες οπότε κάνουμε κάτι διαφορετικό: θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν αριθμό $M>0$ ώστε να ισχύει

$$\tfrac{1}{2|x+1|}\leq M \qquad \text{για } x \text{ κοντά στο } 1.$$

Με άλλα λόγια, προσπαθούμε να φράξουμε το $\frac{1}{2|x+1|}$ από πάνω. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αρκεί να μην επιτρέψουμε στο x να πλησιάσει το -1. Επειδή το x πρέπει να είναι κοντά στο 1, επιλέγουμε μία απόσταση μικρότερη από την απόσταση του 1 από το -1 (η οποία είναι ίση με 2), για παράδειγμα την απόσταση 1 και περιορίζουμε το x να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από 1 από το σημείο 1:

$$0<|x-1|<1.$$

Μετρώντας αποστάσεις, βλέπουμε εύκολα ότι

$$0<|x-1|<1 \quad\Rightarrow\quad |x+1|>1 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2|x+1|}<\tfrac{1}{2}.$$

Άρα

$$0<|x-1|<1 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|}<\tfrac{|x-1|}{2}.$$

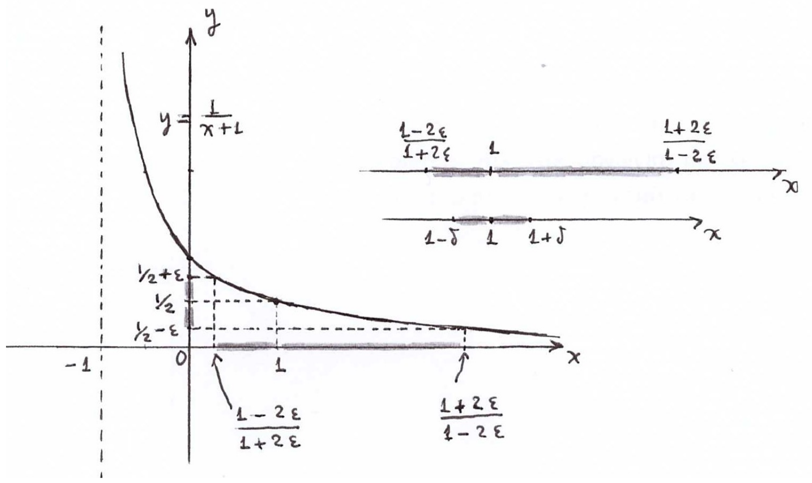
Τώρα αντί να λύσουμε την $\frac{|x-1|}{2|x+1|}<\epsilon$ λύνουμε την απλούστερη $\frac{|x-1|}{2}<\epsilon$:

$$\tfrac{|x-1|}{2}<\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad |x-1|<2\epsilon.$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι αν επιλέξουμε οποιοδήποτε δ που ικανοποιεί την $0<\delta\leq\min\{1,2\epsilon\}$ τότε:

$$\begin{aligned}
0<|x-1|<\delta \quad&\Rightarrow\quad 0<|x-1|<1 \quad\text{και}\quad 0<|x-1|<2\epsilon\\
&\Rightarrow\quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|}<\tfrac{|x-1|}{2} \quad\text{και}\quad 0<|x-1|<2\epsilon\\
&\Rightarrow\quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|}<\tfrac{|x-1|}{2} \quad\text{και}\quad \tfrac{|x-1|}{2}<\epsilon\\
&\Rightarrow\quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|}<\epsilon\\
&\Rightarrow\quad \left|\tfrac{1}{x+1}-\tfrac{1}{2}\right|<\epsilon.
\end{aligned}$$

Και τώρα θα δούμε την λύση με την βοήθεια του γραφήματος της συνάρτησης.
Σημειώνουμε το διάστημα $(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon)$ στον y-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y=\frac{1}{x+1}$.



Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$. Βλέπουμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon)$. Το $(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon})$ δεν είναι συμμετρικό ως προς το 1. Το κοντινότερο προς το 1 άκρο του διαστήματος είναι το $\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq 1 - \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon} = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$, τότε το $(1-\delta, 1+\delta)$ περιέχεται στο $(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon})$ οπότε αν το x βρίσκεται στο $(1-\delta, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon)$.
Στην περίπτωση που είναι $\epsilon > \frac{1}{2}$ θεωρούμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ το οποίο είναι κατάλληλο για το $\epsilon = \frac{1}{2}$, δηλαδή $0 < \delta \leq 1$. Τότε, με ένα τέτοιο δ, είδαμε προηγουμένως ότι αν το x βρίσκεται στο $(1-\delta, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = (0,1)$ και άρα βρίσκεται και στο μεγαλύτερο διάστημα $(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon)$.

4. *Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{x\to 1}\tfrac{x^{12}-1}{x^2-1} = 6, \qquad \lim_{x\to 1\pm}\tfrac{1}{x^{-2}-1} = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \tfrac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^x-2e^{2x}+2} = -\tfrac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0+}(2\log^2 x + 3\log x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0\pm}\tfrac{1}{1-e^x} = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{3x}-1}{e^x-1} = 3, \qquad \lim_{x\to 0+}\tfrac{\log(7x)}{\log(2x)} = 1, \qquad \lim_{x\to 1\pm}\big(\tfrac{4}{\log^2 x} - \tfrac{1}{\log^3 x}\big) = \mp\infty.$$

Λύση: (i) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως:

$$\lim_{x\to 1}\tfrac{x^{12}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\tfrac{(x-1)(x^{11}+\cdots+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\tfrac{x^{11}+\cdots+x^2+x+1}{x+1} = \tfrac{12}{2} = 6.$$

(ii) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{1}{0}$. Όμως:

$$\lim_{x\to 1\pm}\tfrac{1}{x^{-2}-1} = \lim_{x\to 1\pm}\tfrac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1\pm}\tfrac{x^2}{(1-x)(1+x)} = \mp\infty.$$

(iii) Απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{1+(1/x)}+1} = \tfrac{1}{2}.$$

(iv) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{-\infty}$. Όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^x-2e^{2x}+2} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{1+e^{-x}+e^{-2x}}{e^{-x}-2+2e^{-2x}} = -\tfrac{1}{2}.$$

(v) Απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)+(-\infty)$. Όμως:

$$\lim_{x\to 0+}(2\log^2 x + 3\log x) = \lim_{x\to 0+}\log^2 x(2+\tfrac{3}{\log x}) = (-\infty)^2(2+0) = +\infty.$$

(vi) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{1}{0}$. Όμως:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1-e^x} = -\infty$$

διότι $\lim_{x\to 0+}(1-e^x) = 0$ και $1-e^x < 0$ για $x > 0$.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1-e^x} = +\infty$$

διότι $\lim_{x\to 0-}(1-e^x) = 0$ και $1-e^x > 0$ για $x < 0$.
(vii) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}(e^{2x}+e^x+1) = 3.$$

(viii) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{-\infty}{-\infty}$. Όμως:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(7x)}{\log(2x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x+\log 7}{\log x+\log 2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+(\log 7/\log x)}{1+(\log 2/\log x)} = 1.$$

(ix) Απροσδιόριστες μορφές $\frac{1}{0}$. Στην περίπτωση $x \to 1+$, επιπλέον απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Όμως:

$$\lim_{x\to 1-} \left(\frac{4}{\log^2 x} - \frac{1}{\log^3 x}\right) = (+\infty)-(-\infty) = +\infty$$

διότι $\lim_{x\to 1-} \log x = 0$ και $\log x < 0$ για $0 < x < 1$.

$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{4}{\log^2 x} - \frac{1}{\log^3 x}\right) = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{\log^3 x}(4\log x - 1) = (+\infty)(0-1) = -\infty$$

διότι $\lim_{x\to 1+} \log x = 0$ και $\log x > 0$ για $x > 1$.

5. *Έστω $f : (3,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $f(x) \neq -1$ για κάθε $x > 3$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 3} \frac{2}{f(x)+1} = 1$.*
   Λύση: Αν $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$, από απλές ιδιότητες ορίων συνεπάγεται $\lim_{x\to 3} \frac{2}{f(x)+1} = 1$.
   Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to 3} \frac{2}{f(x)+1} = 1$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : (3,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο
   $$g(x) = \frac{2}{f(x)+1} \qquad \text{για κάθε } x \in (3,+\infty).$$
   Τότε έχουμε
   $$f(x) = \frac{2-g(x)}{g(x)}$$
   και, πάλι από ιδιότητες ορίων, από $\lim_{x\to 3} g(x) = 1$ συνεπάγεται $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$.

6. *Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to -\infty}[\frac{1}{x}] = -1$ και $\lim_{x\to +\infty}[\frac{1}{x}] = 0$.*
   Λύση: Όταν $x \leq -1$ ισχύει $-1 \leq \frac{1}{x} < 0$ και άρα $[\frac{1}{x}] = -1$. Δηλαδή η συνάρτηση $[\frac{1}{x}]$ είναι σταθερή -1 κοντά στο $-\infty$ και άρα
   $$\lim_{x\to -\infty} \left[\frac{1}{x}\right] = -1.$$
   Όταν $x > 1$ ισχύει $0 < \frac{1}{x} < 1$ και άρα $[\frac{1}{x}] = 0$. Δηλαδή η συνάρτηση $[\frac{1}{x}]$ είναι σταθερή 0 κοντά στο $+\infty$ και άρα
   $$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{1}{x}\right] = 0.$$

7. *Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες) της* $y = \frac{x^3+x-2}{x^2-1}$.
Λύση: Ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x = \pm 1$. Για $x \neq \pm 1$ έχουμε

$$\frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+2}{x+1}.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = 2$$

και

$$\lim_{x\to -1\pm} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to -1\pm} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \pm\infty.$$

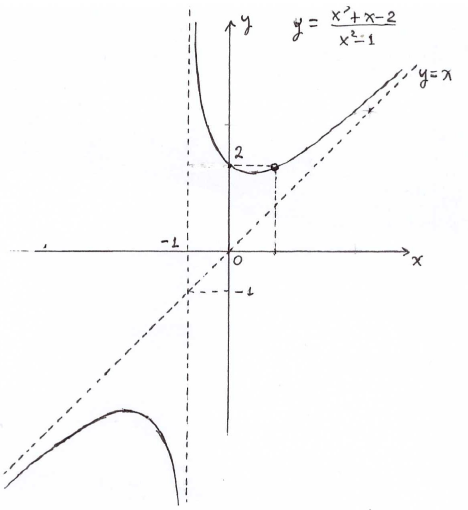
Επομένως η μόνο κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία είναι στο $x = -1$ (και από τις δύο μεριές του -1).
Τώρα

$$\mu = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x-2}{x(x^2-1)} = \frac{x^3+x-2}{x^3-x} = 1$$

και

$$\nu = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3+x-2}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-2}{x^2-1} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη με εξίσωση $y = x$.
Για το $-\infty$ ισχύουν οι ίδιοι υπολογισμοί και η συνάρτηση έχει στο $+\infty$ την ίδια πλάγια ασύμπτωτη.
Να και το γράφημα της συνάρτησης:



8. *Αν* $(x-1)f(x) \geq 1$ *για κάθε* $x \in (0,1) \cup (1,2)$ *βρείτε τα πλευρικά όρια της* f *στο* 1.
Λύση: Για $x \in (0,1)$ έχουμε

$$f(x) \leq \frac{1}{x-1}.$$

Επειδή $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty.$$

Για $x \in (1,2)$ έχουμε

$$f(x) \geq \frac{1}{x-1}.$$

Επειδή $\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty.$$