**Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.**

**Λύσεις έκτου φυλλαδίου ασκήσεων.**

1. *Παρατηρήστε ότι ο πρώτος κανόνας αλλαγής μεταβλητής εφαρμόζεται μόνο στα εφτά πρώτα όρια ενώ ο δεύτερος κανόνας εφαρμόζεται μόνο στα τέσσερα τελευταία:*

$$\lim_{x\to 0-}\Big(\big(\tfrac{1}{x^3}-x^2\big)^2+\big(\tfrac{1}{x^3}-x^2\big)\Big)^{1/3}=+\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\log\tfrac{e^x}{e^{3x}+e^x+1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\log\tfrac{3-2\log x}{2+(\log x)^2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\pi}\tfrac{\sin x}{x+\pi}=-1,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}x\sin\tfrac{1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1/x^2}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\sin\tfrac{1}{\sqrt{x}}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\sin\tfrac{\sin x}{x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}e^{x\sin(1/x)}=1.$$

*Λύση:* (i) Γράφουμε $f(x)=\frac{1}{x^3}-x^2$ και $g(y)=(y^2+y)^{1/3}$.
Τότε $\lim_{x\to 0-}f(x)=-\infty$ και φυσικά είναι $f(x)\neq-\infty$ για $x<0$ κοντά στο 0. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0-}\Big(\big(\tfrac{1}{x^3}-x^2\big)^2+\big(\tfrac{1}{x^3}-x^2\big)\Big)^{1/3}=\lim_{x\to 0-}g(f(x))=\lim_{y\to-\infty}g(y)=+\infty.$$

Ο δεύτερος κανόνας δεν εφαρμόζεται διότι δεν έχει νόημα το να είναι η $g$ συνεχής στο $-\infty$.
(ii) Γράφουμε $f(x)=\frac{e^x}{e^{3x}+e^x+1}$ και $g(y)=\log y$.
Τότε $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ και είναι $f(x)>0$ για $x$ κοντά στο $-\infty$ και κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}\log\tfrac{e^x}{e^{3x}+e^x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}g(f(x))=\lim_{y\to 0+}g(y)=-\infty.$$

Ο δεύτερος κανόνας δεν εφαρμόζεται διότι δεν έχει νόημα το να είναι η $g$ συνεχής στο $0$.
(iii) Γράφουμε $f(x)=\frac{3-2\log x}{2+(\log x)^2}$ και $g(y)=\log y$.
Τότε $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ και είναι $f(x)>0$ για $x>0$ κοντά στο 0. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\log\tfrac{3-2\log x}{2+(\log x)^2}=\lim_{x\to 0}g(f(x))=\lim_{y\to 0+}g(y)=-\infty.$$

Ο δεύτερος κανόνας δεν εφαρμόζεται διότι δεν έχει νόημα το να είναι η $g$ συνεχής στο $0$.
(iv) Γράφουμε $f(x)=x+\pi$ και $g(y)=\frac{\sin y}{y}$.
Τότε $\lim_{x\to-\pi}f(x)=0$ και είναι $f(x)\neq 0$ για $x$ κοντά στο $-\pi$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\pi}\tfrac{\sin x}{x+\pi}=-\lim_{x\to-\pi}g(f(x))=-\lim_{y\to 0}g(y)=-1.$$

Ο δεύτερος κανόνας δεν εφαρμόζεται διότι δεν έχει νόημα το να είναι η $g$ συνεχής στο $0$.
(v) Γράφουμε $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(y)=\frac{\sin y}{y}$.
Τότε $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ και είναι $f(x)\neq 0$ για $x$ κοντά στο $-\infty$ και κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\tfrac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}g(f(x))=\lim_{y\to 0}g(y)=1.$$

Ο δεύτερος κανόνας δεν εφαρμόζεται διότι δεν έχει νόημα το να είναι η $g$ συνεχής στο $0$.
(vi) Γράφουμε $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(y)=e^y$.
Τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ και είναι $f(x)\neq 0$ για $x$ κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1/x^2}=\lim_{x\to+\infty}g(f(x))=\lim_{y\to 0}g(y)=1.$$

Εναλλακτικά, επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $0$ (χωρίς να χρειάζεται να πούμε ότι $f(x) \neq 0$ για $x$ κοντά στο $+\infty$), από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(0) = 1.$$

(vii) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(y) = \sin y$.
Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και είναι $f(x) \neq 0$ για $x$ κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to0} g(y) = 0.$$

Εναλλακτικά, επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $0$ (χωρίς να χρειάζεται να πούμε ότι $f(x) \neq 0$ για $x$ κοντά στο $+\infty$), από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(0) = 0.$$

(viii) Γράφουμε $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ και $g(y) = \sin y$.
Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ αλλά υπάρχουν $x$ τα οποία προσεγγίζουν απεριόριστα το $+\infty$ για τα οποία ισχύει $f(x) = 0$: τα $x = k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$. Άρα δεν εφαρμόζεται ο πρώτος κανόνας. Όμως επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $0$ (χωρίς να χρειάζεται να πούμε ότι $f(x) \neq 0$ για $x$ κοντά στο $+\infty$), από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(0) = 0.$$

(ix) Γράφουμε $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ και $g(y) = e^y$.
Τότε $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ αλλά υπάρχουν $x$ τα οποία προσεγγίζουν απεριόριστα το $0$ για τα οποία ισχύει $f(x) = 0$: τα $x = \frac{1}{k\pi}$ για $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Άρα δεν εφαρμόζεται ο πρώτος κανόνας. Όμως επειδή $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ και επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $0$ (χωρίς να χρειάζεται να πούμε ότι $f(x) \neq 0$ για $x$ κοντά στο $0$), από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to0} e^{x\sin(1/x)} = \lim_{x\to0} g(f(x)) = g(0) = 1.$$

2. *Παρατηρήστε ότι τα παρακάτω όρια δεν έχουν νόημα:*

$$\lim_{x\to0-} x^{\sqrt{3}}, \qquad \lim_{x\to1} \sqrt[4]{(x^2-2x+1)(1-2x^2)}, \qquad \lim_{x\to1+} \left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}.$$

*Λύση:* (i) Η συνάρτηση $x^{\sqrt{3}}$ δεν ορίζεται για $x < 0$ οπότε το $x$ δεν μπορεί να προσεγγίσει απεριόριστα το $0$ από τα αριστερά του και να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
(ii) Επειδή $\lim_{x\to1}(1-2x^2) = -1$, ισχύει $(x^2-2x+1)(1-2x^2) = (x-1)^2(1-2x^2) < 0$ για $x$ κοντά στο $1$. Άρα το $x$ δεν μπορεί να προσεγγίσει απεριόριστα το $1$ και να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sqrt[4]{(x^2-2x+1)(1-2x^2)}$.
(iii) Επειδή $\frac{1-x}{1+x} < 0$ για $x > 1$, το $x$ δεν μπορεί να προσεγγίσει απεριόριστα το $1$ από τα δεξιά του και να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(\frac{1-x}{1+x})^{1/2}$.

3. *Έστω* $f(\sqrt{x}) = 1 - 2(f(x))^2$ *για κάθε* $x > 1$. *Αποδείξτε ότι αν το* $\lim_{x\to1+} f(x)$ *είναι αριθμός τότε οι μόνες πιθανές τιμές του είναι* $1/2$ *και* $-1$. *Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να είναι* $\lim_{x\to1+} f(x) = +\infty$.
*Λύση:* (i) Έστω $\lim_{x\to1+} f(x) = a \in \mathbb{R}$.
Επειδή $\lim_{x\to1+} \sqrt{x} = 1$ και επειδή ισχύει $\sqrt{x} > 1$ για $x > 1$, από τον πρώτο κανόνα αλλαγής μεταβλητής συνεπάγεται

$$\lim_{x\to1+} f(\sqrt{x}) = \lim_{y\to1+} f(y) = a.$$

Τώρα παίρνοντας όριο στην σχέση $f(\sqrt{x}) = 1 - 2(f(x))^2$ όταν $x \to 1+$ βρίσκουμε

$$a = 1 - 2a^2.$$

Αυτή η εξίσωση έχει λύσεις $a = -1$ και $a = \frac{1}{2}$.
Μάλιστα η σταθερή συνάρτηση $f(x) = -1$ *και* ικανοποιεί την σχέση $f(\sqrt{x}) = 1 - 2(f(x))^2$ για κάθε $x > 1$ *και* έχει όριο $\lim_{x\to 1+} f(x) = -1$. Ομοίως η σταθερή συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}$ *και* ικανοποιεί την σχέση $f(\sqrt{x}) = 1 - 2(f(x))^2$ για κάθε $x > 1$ *και* έχει όριο $\lim_{x\to 1+} f(x) = -1$.
(ii) Έστω $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$.
Όπως στο (i), από τον πρώτο κανόνα αλλαγής μεταβλητής συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 1+} f(\sqrt{x}) = \lim_{y\to 1+} f(y) = +\infty.$$

Παίρνοντας όριο στην σχέση $f(\sqrt{x}) = 1 - 2(f(x))^2$ όταν $x \to 1+$ βρίσκουμε $+\infty = -\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

4. *Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3} = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0\pm} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)} = \frac{3}{5}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-\cos(4x)}{x^2} = \frac{7}{2}.$$

*Λύση:* (i) Το πρώτο όριο δίνει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε παραγοντοποιούμε το $x - 1$ από τους όρους του λόγου και έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^3(x^2+3)} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{x+1}{(x-1)(x^2+3)} = \pm\infty.$$

(ii) Επειδή $\lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$, θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $a - 1 < [a] \le a$:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}$$

οπότε

$$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1 \qquad \text{για } x > 0$$

και

$$1 - x > x\left[\frac{1}{x}\right] \ge 1 \qquad \text{για } x < 0.$$

Από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0\pm} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

(iii) Επειδή

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a \lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = a \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = a,$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan(3x))/x}{(\tan(5x))/x} = \frac{3}{5}.$$

(iv) Είναι

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)/x^2}{(\sin x/x)^2} = \frac{1}{2}.$$

(v) Επειδή

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2} = a^2 \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = a^2 \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{a^2}{2},$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-\cos(4x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(4x)}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2} = \frac{16}{2} - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}.$$

5. *(i) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και ότι η $g$ είναι κάτω φραγμένη κοντά στο $\xi$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = +\infty$.*

   *(ii) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η $g$ έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο $\xi$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.*

   *Λύση:* (i) Έστω ότι ισχύει $g(x) \geq l$ για $x$ κοντά στο $\xi$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Επομένως ισχύει $f(x)+g(x) \geq f(x)+l$ για $x$ κοντά στο $\xi$ και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}(f(x) + l) = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

   (ii) Έστω ότι ισχύει $g(x) \geq l > 0$ για $x$ κοντά στο $\xi$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ έχουμε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για $x$ κοντά στο $\xi$ και άρα ισχύει $f(x)g(x) \geq f(x)l$ για $x$ κοντά στο $\xi$. Από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και από $l > 0$ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} f(x)l = +\infty$ και άρα $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty$.
   Η περίπτωση με το $-\infty$ είναι παρόμοια.

6. *(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{4} < \frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1} < \frac{3}{4}$ κοντά στο $1$.*

   *(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $1 - 10^{-5} < \frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1} < 1 + 10^{-5}$ κοντά στο $-\infty$.*

   *Λύση:* (i) Επειδή $\lim_{x\to1} \frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1} = \frac{1}{2}$ και επειδή $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{1}{4} < \frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1} < \frac{3}{4}$ κοντά στο $1$.

   (ii) Επειδή $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1} = 1$ και επειδή $1 - 10^{-5} < 1 < 1 + 10^{-5}$ συνεπάγεται ότι ισχύει $1 - 10^{-5} < \frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1} < 1 + 10^{-5}$ κοντά στο $-\infty$.

7. *Αποδείξτε με χρήση κατάλληλων ακολουθιών ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to0\pm} \sin\frac{1}{x}$.*

   *Λύση:* Για την ακολουθία $x'_n = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ ισχύει $x'_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x'_n \to 0$. Επίσης για την ακολουθία $x''_n = \frac{1}{(-\pi/2)+2n\pi}$ ισχύει $x''_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x''_n \to 0$. Όμως

   $$\sin\tfrac{1}{x'_n} = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \to 1 \quad \text{και} \quad \sin\tfrac{1}{x''_n} = \sin(-\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi) = -1 \to -1.$$

   Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0+} \sin\frac{1}{x}$.
   Με τις αντίθετες ακολουθίες προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0-} \sin\frac{1}{x}$.

8. *Αποδείξτε τα παρακάτω όρια ακολουθιών:*

   $$n\sin\tfrac{\pi}{n} \to \pi, \qquad n^2\big(1 - \cos\tfrac{\pi}{n}\big) \to \tfrac{\pi^2}{2}, \qquad n\tan\tfrac{\pi}{2n} \to \tfrac{\pi}{2}.$$

   *Λύση:* (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ και την ακολουθία $x_n = \frac{\pi}{n}$ για $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

   $$n\sin\tfrac{\pi}{n} = \pi\,\tfrac{\sin(x_n)}{x_n} = \pi f(x_n) \to \pi.$$

   (ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ και την ακολουθία $x_n = \frac{\pi}{n}$ για $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

   $$n^2\big(1 - \cos\tfrac{\pi}{n}\big) = \pi^2\,\tfrac{1-\cos(x_n)}{x_n^2} = \pi^2 f(x_n) \to \tfrac{\pi^2}{2}.$$

   (iii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ και την ακολουθία $x_n = \frac{\pi}{2n}$ για $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

   $$n\tan\tfrac{\pi}{2n} = \tfrac{\pi}{2}\,\tfrac{\tan(x_n)}{x_n} = \tfrac{\pi}{2}\,f(x_n) \to \tfrac{\pi}{2}.$$

9. *Αποδείξτε ότι η $y = \sqrt{x+1}$ είναι συνεχής στο $1$ με τον ορισμό της συνέχειας (με $\epsilon$ και $\delta$).*

*Λύση:* Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$|x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon$:

$$|\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} - \epsilon < \sqrt{x+1} < \sqrt{2} + \epsilon.$$

Υποθέτουμε $0 < \epsilon \leq \sqrt{2}$ και συνεχίζουμε:

$$\begin{aligned} |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2} - \epsilon < \sqrt{x+1} < \sqrt{2} + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad 2 - 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2 < x + 1 < 2 + 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2) < x < 1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2). \end{aligned}$$

Ο αριθμός $1$ είναι προφανώς ανάμεσα στους αριθμούς $1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2)$ και $1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2)$:

$$1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2) < 1 < 1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2).$$

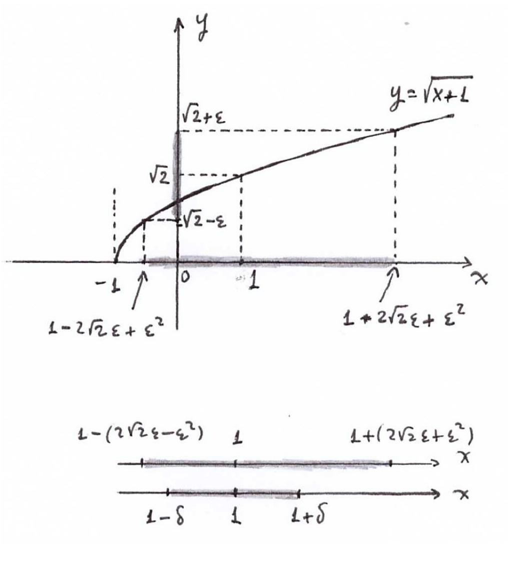
Παρατηρούμε ότι $0 < 2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2 < 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2$, δηλαδή ότι από τους δύο αριθμούς ο πιο κοντινός στο $1$ είναι ο πρώτος (ο αριστερός). Άρα αν επιλέξουμε οποιοδήποτε $\delta$ έτσι ώστε $0 < \delta \leq 2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2$, τότε

$$\begin{aligned} |x - 1| < \delta \quad &\Rightarrow \quad 1 - \delta < x < 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad 1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2) < x < 1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2) \\ &\Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon. \end{aligned}$$

Αν $\epsilon > \sqrt{2}$, τότε επιλέγουμε το $\delta$, όπως το βρήκαμε προηγουμένως, το οποίο αντιστοιχεί στο $\epsilon = \sqrt{2}$. Δηλαδή οποιοδήποτε $\delta$ έτσι ώστε $0 < \delta \leq 2$. Τότε, όπως είδαμε προηγουμένως,

$$|x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon.$$

Θα δούμε τώρα την λύση με την βοήθεια του γραφήματος της συνάρτησης.




Σημειώνουμε το διάστημα $(\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon)$ στον $y$-άξονα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \sqrt{x+1}$.
Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι $0 < \epsilon \leq \sqrt{2}$ και βλέπουμε ότι αν το $x$ βρίσκεται στο διάστημα $(1 - 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2, 1 + 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \sqrt{x+1}$ βρίσκεται στο $(\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon)$. Το $(1 - 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2, 1 + 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2)$ δεν είναι συμμετρικό ως προς το $1$.

Το κοντινότερο προς το 1 άκρο του διαστήματος είναι το $1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2$. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε $\delta$ με $0<\delta\le 1-(1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2)=2\sqrt{2}\epsilon-\epsilon^2$, τότε το $(1-\delta,1+\delta)$ περιέχεται στο $(1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2,1+2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2)$ οπότε αν το $x$ βρίσκεται στο $(1-\delta,1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y=\sqrt{x+1}$ βρίσκεται στο $(\sqrt{2}-\epsilon,\sqrt{2}+\epsilon)$.
Στην περίπτωση που είναι $\epsilon>\sqrt{2}$ θεωρούμε οποιοδήποτε $\delta>0$ το οποίο είναι κατάλληλο για το $\epsilon=\sqrt{2}$, δηλαδή $0<\delta\le 2$. Τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, αν το $x$ βρίσκεται στο $(1-\delta,1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y=\sqrt{x+1}$ βρίσκεται στο $(\sqrt{2}-\sqrt{2},\sqrt{2}+\sqrt{2})=(0,2\sqrt{2})$ και άρα βρίσκεται και στο μεγαλύτερο διάστημα $(\sqrt{2}-\epsilon,\sqrt{2}+\epsilon)$.

10. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $y=\begin{cases}(\sin x)/x & \textit{αν } x\neq 0\\ 1 & \textit{αν } x=0\end{cases}$ *είναι συνεχής στο* $0$.

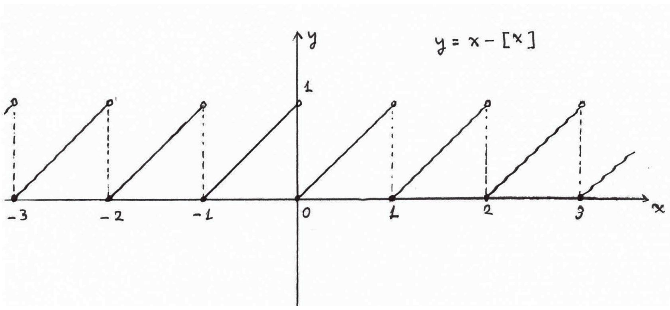
*Λύση:* Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

11. *Σχεδιάστε το γράφημα της* $y=x-[x]$ *και αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. *Στα σημεία του* $\mathbb{Z}$ *η συνάρτηση είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής.*

*Λύση:* Έστω $k\in\mathbb{Z}$ και $x\in[k,k+1)$. Τότε $k\le x<k+1$ και άρα $[x]=k$ οπότε

$$y=x-[x]=x-k \qquad \text{για } x\in[k,k+1).$$

Άρα το γράφημα της συνάρτησης είναι:




Τα αποτελέσματα για την συνέχεια της συνάρτησης διακρίνονται καθαρά στο γράφημα. Αλλά ας τα δούμε και αυστηρά.
Σε κάθε *ανοικτό* διάστημα $(k,k+1)$ με $k\in\mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων: $y=x-k$ (όπου $k$ είναι σταθερή συνάρτηση). Σε κάθε $k\in\mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι αριστερά ασυνεχής και δεξιά συνεχής. Πράγματι στο $[k-1,k)$ είναι $y=x-(k-1)$ ενώ στο $(k,k+1)$ είναι $y=x-k$ και η τιμή στο $k$ είναι $y=k-k=0$. Άρα

$$\lim_{x\to k-}y=\lim_{x\to k-}(x-(k-1))=1\neq 0, \qquad \lim_{x\to k+}y=\lim_{x\to k+}(x-k)=0.$$

12. *Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:*

$y=\sin(x^2+x-1)$ *στο* $\mathbb{R}$.

$y=\log(\sin x)$ *στην ένωση των* $(2k\pi,\pi+2k\pi)$ *για* $k\in\mathbb{Z}$.

$y=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$ *στο* $(-\infty,0)$.

$y=\sin(\log x)$ *στο* $(0,+\infty)$.

$y=\sqrt{1-\cos x}$ *στο* $\mathbb{R}$.

$y=(x^2-5x+6)^{\sqrt{2}}$ *στο* $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

$y=\log(\log x)$ *στο* $(1,+\infty)$.

$y=\log(1-\cos x)$ *στο* $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

$y=\frac{\sqrt{100-x^2}\,\log x}{\sin^2 x-2\sin x+1}$ *στο* $(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})\cup(\frac{5\pi}{2},10]$.

*Λύση:* Όλες οι συναρτήσεις έχουν την μορφή σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων. Άρα το μόνο που μένει να κάνουμε είναι να πιστοποιήσουμε ότι τα αναφερόμενα σύνολα είναι τα αντίστοιχα πεδία ορισμού (ή υποσύνολα των αντίστοιχων πεδίων ορισμού).
Για παράδειγμα, αφού ελέγξουμε ότι το πεδίο ορισμού της $y = \log(\sin x)$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε ένα τυχαίο $x_0$ σε κάποιο από αυτά τα διαστήματα και λέμε ότι: η συνάρτηση $z = \sin x$ είναι συνεχής στο $x_0$ και η συνάρτηση $y = \log z$ είναι συνεχής στο $z_0 = \sin x_0$ (αφού $z_0 > 0$) και επομένως η σύνθεση $y = \log \sin x$ είναι συνεχής στο $x_0$.

13. *Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $a^b = e^{b \log a}$ για $a > 0$ για να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:*
$y = x^x$ *στο* $(0, +\infty)$.
$y = (x^2 - 1)^{\frac{x-2}{x+2}}$ *στο* $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty)$.
$y = (1 - x^2)^{\log x}$ *στο* $(0, 1)$.
*Λύση:* (i) Το πεδίο ορισμού της $y = x^x$ είναι το $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $y = x^x = e^{x \log x}$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.
(ii) Το πεδίο ορισμού της $y = (x^2 - 1)^{\frac{x-2}{x+2}}$ αποτελείται από τα $x$ για τα οποία $x^2 - 1 > 0$ και $x \neq -2$ καθώς και από τα $x$ για τα οποία $x^2 - 1 = 0$ και $\frac{x-2}{x+2} > 0$. Ο δεύτερος συνδυασμός είναι αδύνατος, οπότε το πεδίο ορισμού προκύπτει από τον πρώτο συνδυασμό, δηλαδή είναι το $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty)$. Για αυτά τα $x$ έχουμε $y = (x^2 - 1)^{\frac{x-2}{x+2}} = e^{\frac{x-2}{x+2} \log(x^2-1)}$ οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.
(iii) Το πεδίο ορισμού της $y = (1 - x^2)^{\log x}$ αποτελείται από τα $x$ για τα οποία $1 - x^2 > 0$ και $x > 0$ καθώς και από τα $x$ για τα οποία $1 - x^2 = 0$ και $\log x > 0$. Ο δεύτερος συνδυασμός είναι αδύνατος, οπότε το πεδίο ορισμού προκύπτει από τον πρώτο συνδυασμό, δηλαδή είναι το $(0, 1)$. Για αυτά τα $x$ έχουμε $y = (1 - x^2)^{\log x} = e^{\log x \log(1-x^2)}$ οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

14. *Έστω ότι η $f$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει $f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$.*
*Λύση:* Επειδή η $f$ είναι αύξουσα, το $a = \lim_{x \to 0+} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $-\infty$. Για την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$ έχουμε ότι $x_n \to 0$ και $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$f(\tfrac{1}{n}) = f(x_n) \to a.$$

Τώρα από την σχέση $f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$, βρίσκουμε

$$a = 1 + 0$$

και άρα $a = 1$.