Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις έβδομου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Έχουν οι παρακάτω συναρτήσεις μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0,1)$; Στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$; Στο διάστημα $[0,1]$;*

$$y = x^2, \quad y = x^2 - x, \quad y = x - x^2, \quad y = \sin(2\pi x).$$

Για ποιό από τα τρία διαστήματα η απάντηση είναι άμεση για όλες τις συναρτήσεις;

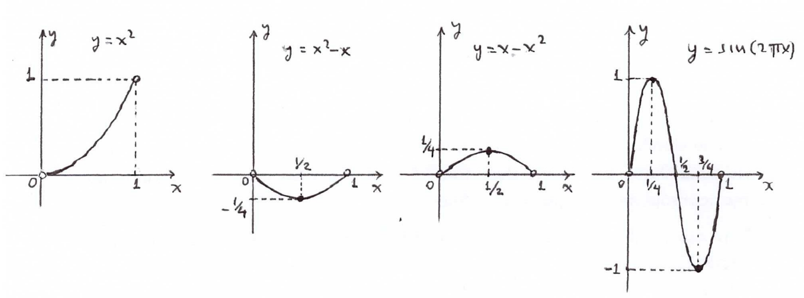
Λύση: Το διάστημα $[0,1]$ είναι κλειστό και φραγμένο και όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς. Άρα όλες οι συναρτήσεις έχουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Άρα για το $[0,1]$ η απάντηση είναι άμεση.

(i) Το σύνολο τιμών της $y = x^2$ στο διάστημα $(0,1)$ είναι το διάστημα $(0,1)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0,1)$. Το σύνολο τιμών της $y = x^2$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ είναι το διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη τιμή στο $(-\infty,+\infty)$ αλλά έχει ελάχιστη τιμή 0.

(ii) Το σύνολο τιμών της $y = x^2 - x = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ στο $(0,1)$ είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4},0)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη τιμή στο $(0,1)$ αλλά έχει ελάχιστη τιμή $-\frac{1}{4}$. Το σύνολο τιμών της $y = x^2 - x$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4},+\infty)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη τιμή στο $(-\infty,+\infty)$ αλλά έχει ελάχιστη τιμή $-\frac{1}{4}$.

(iii) Το σύνολο τιμών της $y = x - x^2 = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ στο $(0,1)$ είναι το διάστημα $(0,\frac{1}{4}]$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει ελάχιστη τιμή στο $(0,1)$ αλλά έχει μέγιστη τιμή $\frac{1}{4}$. Το σύνολο τιμών της $y = x - x^2$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ είναι το διάστημα $(-\infty,\frac{1}{4}]$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει ελάχιστη τιμή στο $(-\infty,+\infty)$ αλλά έχει μέγιστη τιμή $\frac{1}{4}$.

(iv) Η $y = \sin(2\pi x)$ έχει τιμή 1 στο σημείο $\frac{1}{4}$ του $(0,1)$ και προφανώς αυτή είναι η μέγιστη τιμή της στο $(0,1)$ αλλά και στο $(-\infty,+\infty)$. Επίσης η συνάρτηση έχει τιμή -1 στο σημείο $\frac{3}{4}$ του $(0,1)$ και προφανώς αυτή είναι η ελάχιστη τιμή της στο $(0,1)$ αλλά και στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0,1)$ καθώς και στο $(-\infty,+\infty)$.



2. *Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης*

$$f(x) = \tfrac{1}{x} + \tfrac{7}{x-1} + \tfrac{3}{x-2} + \tfrac{4}{x-3}$$

σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ και $(3,+\infty)$. Για κάθε c βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = c$.

Λύση: Κάθε συνάρτηση

$$y = \tfrac{a}{x-x_0},$$

με $a > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,x_0)$ καθώς και στο $(x_0,+\infty)$ αλλά και σε κάθε υποδιάστημα αυτών των δύο διαστημάτων.

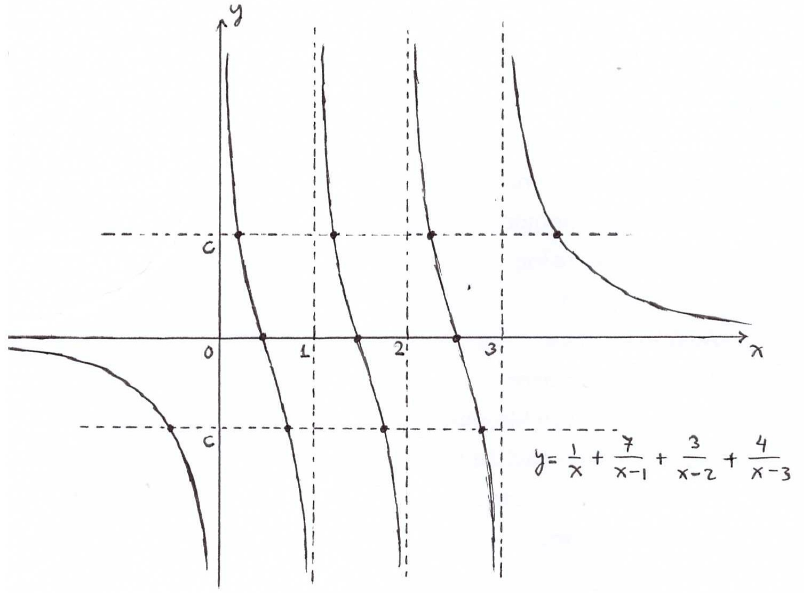
Επίσης, όταν προσθέτουμε γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις το αποτέλεσμα είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Άρα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$ η δοσμένη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Θεωρώντας τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στα άκρα αυτών των πέντε διαστημάτων, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της στο $(-\infty, 0)$ είναι το $(-\infty, 0)$, το σύνολο τιμών της σε καθένα από τα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της στο $(3, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$. Τέλος, λόγω γνήσιας μονοτονίας η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Αν $c > 0$, τότε το c περιέχεται στα τέσσερα από τα πέντε σύνολα τιμών: στα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τέσσερις λύσεις, μία σε καθένα από αυτά τα τέσσερα διαστήματα.

Αν $c < 0$, τότε το c περιέχεται στα τέσσερα από τα πέντε σύνολα τιμών: στα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τέσσερις λύσεις, μία σε καθένα από αυτά τα τέσσερα διαστήματα.

Αν $c = 0$, τότε το c περιέχεται στα τρία από τα πέντε σύνολα τιμών: στα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις, μία σε καθένα από αυτά τα τρία διαστήματα.



3. *Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.*

(i) Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες για την f: δηλαδή, είτε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ είτε $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

(ii) Αν δεν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, πόσες δυνατότητες υπάρχουν για την f;

Λύση: Κατ' αρχάς, για να βρούμε τύπο της f, παρατηρούμε ότι η εξίσωση $x^2 + f(x)^2 = 1$ με άγνωστο το $f(x)$ έχει για κάθε $x \in (-1, 1)$ ακριβώς δύο λύσεις:

$$f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \qquad f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Για $x = -1$ και για $x = 1$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση $f(-1) = f(1) = 0$.

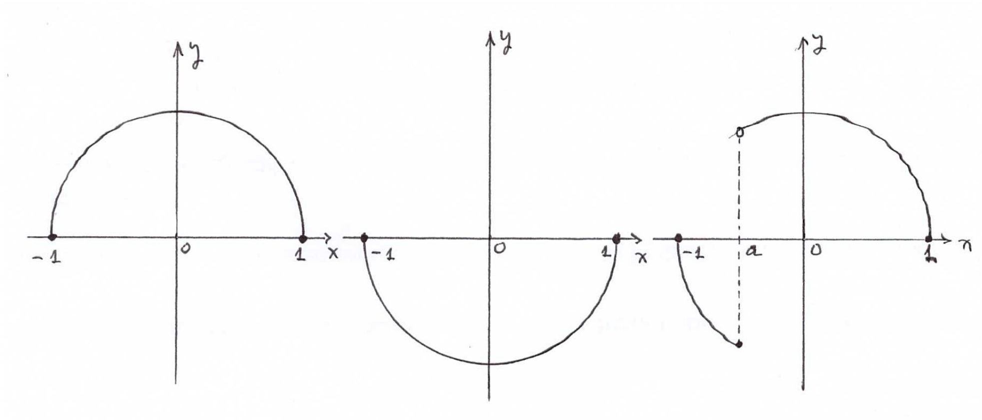
(i) Κατόπιν παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ και οι δύο λύσεις για το $f(x)$ είναι $\neq 0$. Με άλλα λόγια η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $(-1, 1)$. Άρα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 1)$.

Στην περίπτωση που η f είναι *σταθερά θετική* στο $(-1, 1)$ ο τύπος της είναι

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Στην περίπτωση που η f είναι *σταθερά αρνητική* στο $(-1,1)$ ο τύπος της είναι

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$



(ii) Αν δεν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε τίποτε δεν εμποδίζει την συνάρτηση να έχει σε άλλα σημεία $x \in (-1,1)$ θετική τιμή, δηλαδή να είναι $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, και σε άλλα σημεία $x \in (-1,1)$ αρνητική τιμή, δηλαδή να είναι $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.
Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε ένα αυθαίρετο $a \in (-1,1)$ και να ορίσουμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & \text{αν } -1 \leq x \leq a \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{αν } a < x \leq 1 \end{cases}$$

Αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί την δοσμένη εξίσωση, αλλά φυσικά δεν είναι συνεχής. Επειδή υπάρχουν άπειροι αριθμοί $a \in (-1,1)$ έχουμε άπειρες αντίστοιχες συναρτήσεις.
Υπάρχουν ακόμη περισσότερες δυνατότητες: μπορούμε να επιλέξουμε δύο αυθαίρετα $a, b \in (-1,1)$ με $a < b$ και να ορίσουμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & \text{αν } -1 \leq x \leq a \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{αν } a < x \leq b \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{αν } b < x \leq 1 \end{cases}$$

4. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση* $\cot x = 2x^2 - 3x$ *έχει τουλάχιστον μία λύση στο* $(k\pi, (k+1)\pi)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

   Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \cot x - 2x^2 + 3x$ είναι συνεχής στο $(k\pi, (k+1)\pi)$ και έχει πλευρικά όρια $+\infty$ και $-\infty$ στα άκρα του διαστήματος. Γνωρίζουμε γενικά ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα έχει σύνολο τιμών το οποίο είναι διάστημα. Άρα το σύνολο τιμών της f στο $(k\pi, (k+1)\pi)$ είναι κάποιο διάστημα J.
   Αν b είναι το δεξιό άκρο του J, τότε ισχύει $f(x) \leq b$ για κάθε $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$. Αν το b είναι αριθμός, συνεπάγεται $\lim_{x\to k\pi+} f(x) \leq b$, το οποίο είναι άτοπο διότι $\lim_{x\to k\pi+} f(x) = +\infty$. Άρα το δεξιό άκρο του J είναι το $+\infty$. Ομοίως, αν a είναι το αριστερό άκρο του J, τότε ισχύει $a \leq f(x)$ για κάθε $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$. Αν το a είναι αριθμός, συνεπάγεται $a \leq \lim_{x\to(k+1)\pi-} f(x)$, το οποίο είναι άτοπο διότι $\lim_{x\to(k+1)\pi-} f(x) = -\infty$. Άρα το αριστερό άκρο του J είναι το $-\infty$.
   Επομένως το $J = (-\infty, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών της f στο $(k\pi, (k+1)\pi)$. Άρα το 0 (όπως και κάθε αριθμός) είναι τιμή της f, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$.

5. *Έστω συνεχείς* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Αν* $f(a) < g(a)$ *και* $f(b) > g(b)$ *αποδείξτε ότι υπάρχει* $\xi \in (a,b)$ *ώστε* $f(\xi) = g(\xi)$.

Λύση: Η συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι συνεχής και ισχύει $h(a) < 0$ και $h(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $h(\xi) = 0$ οπότε $f(\xi) = g(\xi)$.

6. *Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων;*

$$y = -3x^5 + 4x^4 - x^3 + x^2 + x + 6, \quad y = x^6 - 8x^3 + 2, \quad y = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

Λύση: (i) Η πρώτη συνάρτηση είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Οι άλλες δύο συναρτήσεις είναι πολυώνυμα άρτιου βαθμού με θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή οπότε τα σύνολα τιμών τους είναι του τύπου $[m, +\infty)$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή καθεμιάς από αυτές.
(ii) Για την δεύτερη συνάρτηση έχουμε

$$x^6 - 8x^3 + 2 = (x^3 - 4)^2 - 14 \geq -14 \qquad \text{για κάθε } x.$$

Επίσης, στο σημείο $x = \sqrt[3]{4}$ η συνάρτηση έχει τιμή -14. Άρα $m = -14$ και η δεύτερη συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[-14, +\infty)$.
(iii) Για την τρίτη συνάρτηση έχουμε

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 &= (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^2 - 2x + 1) \\ &= (x^2 - 2x + 1)x^2 + (x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-1)^2(x^2+1) \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x. \end{aligned}$$

Επίσης, στο σημείο $x = 1$ η συνάρτηση έχει τιμή 0. Άρα $m = 0$ και η τρίτη συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

7. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση*

$$3x^8 - x^7 - 24x^6 - 4x^5 - 1820x^4 - 13x^3 - x^2 - 8x = 7$$

έχει τουλάχιστον μία λύση.
Λύση: Το πολυώνυμο $3x^8 - x^7 - 24x^6 - 4x^5 - 1820x^4 - 13x^3 - x^2 - 8x$ είναι άρτιου βαθμού με θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή, οπότε το σύνολο τιμών του είναι του τύπου $[m, +\infty)$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή του.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το 7 είναι τιμή του πολυωνύμου, δηλαδή ότι το 7 περιέχεται στο (άγνωστο) σύνολο τιμών $[m, +\infty)$. Αν καταφέρουμε να βρούμε οποιαδήποτε τιμή c του πολυωνύμου η οποία είναι ≤ 7 τότε, επειδή αυτή η τιμή c θα πρέπει να περιέχεται στο σύνολο τιμών $[m, +\infty)$, θα έχουμε αποδείξει ότι $m \leq c$ και άρα $m \leq 7$ και επομένως $7 \in [m, +\infty)$.
Η τιμή στο 0 είναι 0 η οποία είναι ≤ 7 και τελειώσαμε.

8. *Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.*
(i) $y = x + \frac{1}{x}$ *στο* $(-\infty, 0)$.
(ii) $y = e^{2x} + 3x$ *στο* $(-\infty, +\infty)$.
(iii) $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ *στο* $(-\infty, +\infty)$.
Ποιές από τις τρεις συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες;
Λύση: (i) Η $y = x + \frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 0)$ (ελέγξτε το αλγεβρικά).
Βάσει του ορίου της συνάρτησης στο $-\infty$, έχουμε ότι το σύνολο τιμών της στο $(-\infty, -1]$ είναι το $(-\infty, -2]$. Επίσης βάσει του ορίου της συνάρτησης στο 0, έχουμε ότι το σύνολο τιμών της στο $[-1, 0)$ είναι πάλι το $(-\infty, -2]$. Άρα το σύνολο τιμών στο $(-\infty, 0)$ είναι το $(-\infty, -2]$.

Η συνάρτηση δεν είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, 0)$ (αφού έχει ίδιο σύνολο τιμών σε διαφορετικά υποδιαστήματα του $(-\infty, 0)$) και άρα δεν είναι αντιστρέψιμη.

(ii) Η $y = e^{2x} + 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ (ελέγξτε το αλγεβρικά) και βάσει των ορίων της στα $-\infty$ και $+\infty$ έχουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα (ως γνησίως μονότονη) και άρα αντιστρέψιμη.

(iii) Η $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$ (ελέγξτε το αλγεβρικά) και βάσει των ορίων της στα $-\infty$ και $+\infty$ έχουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-1, 1)$.
Η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα (ως γνησίως μονότονη) και άρα αντιστρέψιμη.

9. *Αποδείξτε ότι η $y = x^3 - 3x$ είναι αντιστρέψιμη στο $[1, +\infty)$. Τί μπορείτε να πείτε για την αντίστροφη συνάρτηση σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια; Να επαναλάβετε για καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[-1, 1]$.*

   Λύση: (i) Η $y = x^3 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ (ελέγξτε το αλγεβρικά) και άρα αντιστρέψιμη. Με βάση το όριό της στο $+\infty$ έχει σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[-2, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

   (ii) Η $y = x^3 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ (ελέγξτε το αλγεβρικά) και άρα αντιστρέψιμη. Με βάση το όριό της στο $-\infty$ έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 2]$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 2]$, σύνολο τιμών το $(-\infty, -1]$, είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

   (iii) Η $y = x^3 - 3x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ (ελέγξτε το αλγεβρικά) και άρα αντιστρέψιμη. Το σύνολο τιμών της είναι το $[-2, 2]$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[-2, 2]$, σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής.