Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών $\big(\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\big)$, $\big(\frac{a+b}{2}+(-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\big)$, $\big(n-2[\frac{n}{2}]\big)$, $\big(n-3[\frac{n}{3}]\big)$.

2. Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμίας από τις τέσσερις ακολουθίες οι οποίες ορίζονται από τους (κοινούς και για τις τέσσερις) πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. (Υπόδειξη: Διαβάστε την άσκηση 2.1.7.)

3. Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες $(n^4/2^n)$ και $(8^n/n!)$ δεν είναι μονότονες αλλά και ότι είναι μονότονες *από κάποια τιμή του δείκτη και πέρα*. Είναι φραγμένες;

4. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας $\epsilon > 0$ και, υπολογίζοντας κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του ϵ, όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad (-\tfrac{1}{2})^n \to 0, \quad \tfrac{2n+3}{3n+5} \to \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{\sin n}{n\sqrt{n}} \to 0, \quad \tfrac{1}{2^n+3n} \to 0.$$

5. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ορίων, δηλαδή παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας το κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του M, όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι

$$(5/3)^n \to +\infty, \quad n^2 + (-1)^n n \to +\infty, \quad \tfrac{n^3+1}{n+1} \to +\infty, \quad n(2+\cos n) \to +\infty.$$

6. Διερευνήστε την ύπαρξη και την τιμή του ορίου $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x)^n}{(1-x)^n}$ ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου x.

7. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ορίων, αποδείξτε ότι

$$(\tfrac{1}{n} + (-1)^n n)^4 \to +\infty, \quad (\tfrac{1}{3} + \tfrac{(-1)^n}{2})^n \to 0, \quad \tfrac{2}{3} + \tfrac{2^2}{3^2} + \cdots + \tfrac{2^n}{3^n} \to 2.$$

8. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστούς όρους:

$$\tfrac{1+(-1)^n(n+2)}{3n}, \quad 3^{(-1)^n}, \quad 3^{(-1)^n n}, \quad (\tfrac{1}{2} + \tfrac{2(-1)^n}{3})^n.$$