

Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Δέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Υπολογίστε το $\int_{-2}^4 f(x) dx$ όταν $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } -2 \leq x < 0 \\ 2 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 3/x & \text{αν } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

2. Υπολογίστε το $\int_{-3/2}^{5/2} [x] dx$.

3. Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι

$$0.60 < \int_{1/2}^2 \frac{x}{x^2+1} dx < 0.75.$$

4. Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2} dt = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2} dt = 1.$$

5. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(i) Τι συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f^2(x) dx = 0$;

(ii) Τι συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a, b]$;

6. (i) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Ποιές είναι όλες οι παράγουσες της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$;

(ii) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ ώστε η τιμή της στο $x = 1$ να είναι -3 . Πόσες τέτοιες παράγουσες υπάρχουν;

7. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγουσα στο $(-\infty, +\infty)$.

8. Έστω $\int f(x) dx = \int g(x) dx + x^2 + 3 + \sin x$. Με τί είναι ίση η παράσταση

$$\int f(x) dx - \int g(x) dx;$$

9. Βρείτε συνεχή συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ και αριθμό a ώστε να ισχύει

$$\int_a^x f(t) dt = 3x^2 - 12$$

για κάθε x . Πόσες λύσεις υπάρχουν;

10. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει

$$\int_0^x f(t) dt = \cos x$$

για κάθε x ; Ίδια ερώτηση για την

$$\int_0^x f(t) dt = \cos x - 1.$$

11. Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2} dt, \quad \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$$

και τις παραγώγους τους.

12. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = 0.$$

13. Βρείτε $a > 0$ και b ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - b - cx - dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1.$$

14. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Μελετήστε το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων, αν $a < b$, $\lambda > 0$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

15. (i) Αν η $f : [-b, -a] \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

(ii) Αν η $f : [-b, -a] \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

(iii) Αν η $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$.

(iv) Αν η $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^b f(x) dx = 0$.

Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

16. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ αποδείξτε ότι:

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

17. Αν $a < b < c < d$, δηλαδή αν το διάστημα $[b, c]$ είναι μικρότερο από το διάστημα $[a, d]$, ισχύει

$$\int_b^c f(x) dx \leq \int_a^d f(x) dx;$$

18. Με αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:

$$\begin{aligned} & \int x^3 \cos(x^4) dx, \quad \int \cos^2 x \sin x dx, \quad \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \\ & \int \sqrt{2x+1} dx, \quad \int x\sqrt{x+1} dx, \quad \int x^2\sqrt{2x+1} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx, \\ & \int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} dx, \quad \int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^3} dx, \quad \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int x\sqrt[3]{x-1} dx, \\ & \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx, \quad \int \sqrt{4 - \sin x} \cos x dx, \quad \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3} dx, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx, \\ & \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \int x^2 e^{x^3} dx, \quad \int e^{3 \sin x} \cos x dx, \quad \int \tan x dx, \\ & \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx, \quad \int \sqrt{1+3 \cos^2 x} \sin(2x) dx, \quad \int \frac{1}{1+e^x} dx, \quad \int \sin^3 x dx, \\ & \int \sin^4 x dx, \quad \int \frac{1}{x(x^4+1)} dx, \quad \int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}} dx, \quad \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx, \\ & \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{4+x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{x^2-x+2} dx, \\ & \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{1+\cos x} dx, \quad \int \frac{1}{2+\cos^2 x} dx. \end{aligned}$$